

Metody numeryczne

Wykład 12

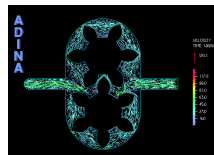
Numeryczne metody rozwiązywania
równań różniczkowych cząstkowych

Wprowadzenie

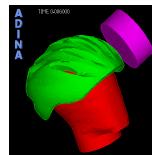
- * Modelowanie numeryczne - teoria a praktyka
- * Równania różniczkowe cząstkowe
- * Zaawansowane metody numeryczne
- * Implementacja metod numerycznych rozwiązywania r.r.cz. (Octave)

Zaawansowane MN

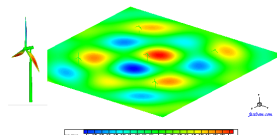
- m. różnic skończonych
- m. elementów skończonych
- m. elementów brzegowych
- m. Treffftza
- m. bezsiatkowe
- ...



(d)



(e)



(f)

Źródło: (a) <http://www.adina.com/newsgH107.shtml>

(b) <http://www.adina.com/newsggrp2003.shtml>

(c) <http://www.fastbem.com/Examples.html>

Równania różniczkowe cząstkowe

Niech $u = u(x_1, \dots, x_n)$, w szczególności $u = u(x, y, z, t)$

$$u_{x_i} \equiv \frac{\partial u(\dots, x_i, \dots)}{\partial x_i}$$

$$u_{x_i} \equiv \frac{\partial u(\dots, x, \dots, y, \dots)}{\partial x \partial y}, \text{ a więc } u_{xx} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u(\dots, x, \dots, y, \dots)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(\dots, x, \dots, y, \dots)}{\partial x^2}, \dots$$

- Laplace'a

$$\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0$$

- Helmholtza

$$\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + \lambda u = 0$$

- Poissona

$$\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = f$$

- Poissona nieliniowe

$$\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = f(u)$$

- przewodnictwa cieplnego (dyfuzji)

$$u_t - \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0$$

- falowe

$$u_{tt} - \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0$$

- belki

$$u_{ttt} - u_{xxxxx} = 0$$

- ...

Równania różniczkowe cząstkowe; RRCz drugiego rzędu

- Rząd równania jest określony rzędem najwyższej pochodnej występującej w równaniu;
- Równanie liniowe – wszystkie pochodne cząstkowe nie zależą od zmiennych zależnych (czyli funkcji), ale mogą zależeć od zmiennych niezależnych.
- Równanie jest jednorodne – bez czynnika źródłowego, albo niejednorodne (prawa strona $\neq 0$), z czynnikiem źródłowym. Czynniki źródłowy nie wpływa na cechy ogólne równania ani (najczęściej) na metodę rozwiązania.

Ogólna postać liniowego równania różniczkowego cząstkowego drugiego rzędu dla $u = u(x, y)$, (w zagadnieniach dynamicznych/stacjonarnych, zmienna $y \rightarrow t$):

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = f$$

gdzie A, B, C, D, E, F – współczynniki mogące być funkcjami x oraz y ,
 $f = f(x, y)$ – funkcja wymuszająca.

Zał.: $A \neq 0$, lub $B \neq 0$, lub $C \neq 0$ jest różny od zera

RRCz2rz - klasyfikacja

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = f$$

- wyróżnik

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

$$Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

- $\Delta < 0$ – r. eliptyczne – stacjonarne, zagadnienia brzegowe (r. Laplace'a)
- $\Delta = 0$ – r. paraboliczne – niestacjonarne, zagadnienia początkowo-brzegowe (procesy dyfuzyjne, r. przewodnictwa cieplnego)
- $\Delta > 0$ – r. hiperboliczne – niestacjonarne, zagadnienia początkowo-brzegowe (wibracje $\rightarrow$ r. falowe)

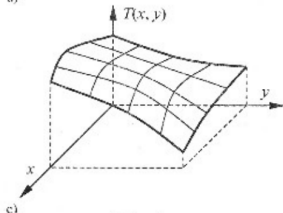
Pola skalarne i wektorowe

Pole – funkcja, która każdemu punktowi pewnego obszaru przypisuje pewną wielkość

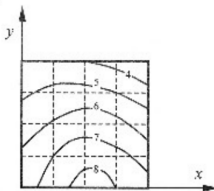
Pole skalarne – funkcja określona w każdym punkcie rozpatrywanego obszaru, której wartością jest liczba (skalar)

Pole wektorowe – funkcja określona w każdym punkcie rozpatrywanego obszaru, której wartością jest wektor

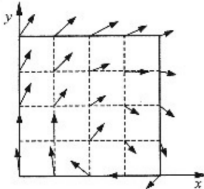
a)



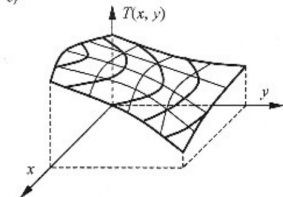
b)



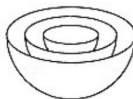
a)



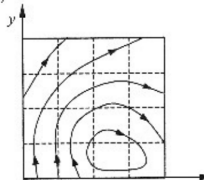
c)



d)

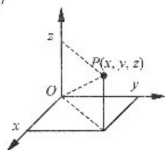


b)

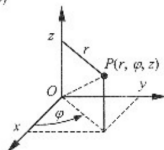


Układy współrzędnych

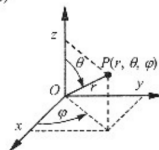
a)



b)



c)



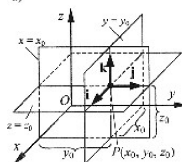
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

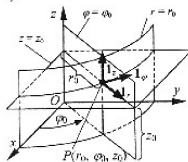
$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos \theta = \frac{z}{r} \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \end{cases}$$

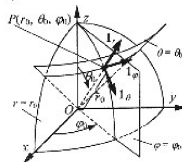
a)



b)



c)

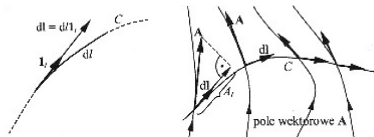


Wielkości polowe

Całka krzywoliniowa z wektora **A** wzdłuż krzywej **C** – praca wektora **A** (na drodze **C**):

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_C A_x dx + A_y dy + A_z dz \quad (1)$$

$d\mathbf{l}$ – wektor elementarnego przemieszczenia wzdłuż krzywej **C**



Cyrkulacja wektora **A** (**C** – krzywa zamknięta)

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (2)$$

Jeśli $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$ dla dow. **C** $\rightarrow$ pole potencjalne (np. pole elektrostatyczne) $\rightarrow$ równanie (1) nie zależy od kształtu **C** ale od jej punktów końcowych.

Wielkości polowe c.d.

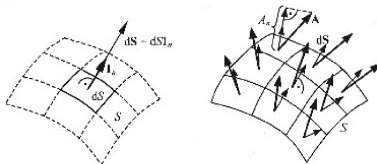
Strumień wektora **A** przez powierzchnię **S**

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S A_x dydz + A_y dx dz + A_z dy dx \quad (3)$$

$d\mathbf{S}$ – wektor prostopadły do elementarnej powierzchni dS o długości równej polu jej powierzchni

Strumień wektora – miara "liczby linii pola" przenikających zadaną powierzchnię.

Jeśli $\oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0$ dla dow. powierzchni zamkniętej $S \rightarrow$ pole bezźródłowe (np. pole magnetyczne) $\rightarrow$ tyle samo linii pola wnika do wnętrza obszaru zamkniętego przez tę powierzchnię, ile z niego wychodzi.



Operatory różniczkowe

- operator Hamiltona (nabla)

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

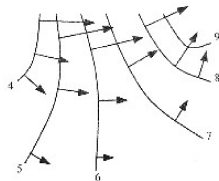
$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

- gradient i pochodna kierunkowa (pola skalarnego)

$$\text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \nabla \varphi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{A}} = A_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + A_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + A_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mathbf{A} \cdot \nabla \varphi$$

Gradient pola skalarnego φ – wektor, który w każdym punkcie pola φ wyznacza kierunek najszybszego wzrostu wartości φ



- dywergencja (rozbieżność, źródłowość) (pola wektorowego) – (gromadzenie się jakiejś wielkości)

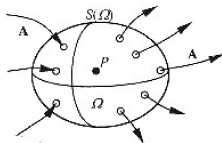
$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(P) = \lim_{\Omega \rightarrow P} \frac{1}{|\Omega|} \oiint_{S(\Omega)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

$\operatorname{div} \mathbf{A}(P) > 0$ – P – źródło

$\operatorname{div} \mathbf{A}(P) < 0$ – P – ujście/ściek

$\operatorname{div} \mathbf{A}(P) = 0$ – pole w P bezźródłowe/solenoidalne

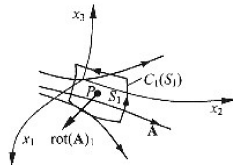


- rotacja (wirowość) (pola wektorowego)

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \nabla \times \mathbf{A}\end{aligned}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{bmatrix}$$

$$(\text{rot } \mathbf{A}(P))_1 = \lim_{S_1 \rightarrow P} \frac{1}{|S_1|} \oint_{C_1(S_1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$



$\text{rot } \mathbf{A} = 0 \rightarrow \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$ – pole potencjalne
pole bezwirowe = pole potencjalne

- laplasjan

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- ...

Równania Maxwell'a

postać różniczkowa	postać całkowa	sens fizyczny
Prawo indukcji elektromagnetycznej Faradaya		
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	Zmienne w czasie pole magnetyczne wytwarza pole elektryczne.
Prawo Ampere'a rozszerzone przez Maxwella		
$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu I + \mu \varepsilon \frac{d\Phi_E}{dt}$	Przepływający prąd oraz zmienne pole elektryczne wytwarzają pole magnetyczne.
Prawo Gaussa dla elektryczności		
$\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$	$\varepsilon \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q$	Ładunki są źródłem pola elektrycznego.
Prawo Gaussa dla magnetyzmu		
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$	Pole magnetyczne jest beźźródłowe.

Pole elektrostatyczne

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu I + \mu \varepsilon \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$\varepsilon \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Pole elektrostatyczne

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$$

$$\varepsilon \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q$$

Pole elektrostatyczne

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$$

$$\varepsilon \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \text{rot} \mathbf{E} = 0$$

$$\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \text{div} \mathbf{D} = \rho$$

Pole elektrostatyczne

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$$

$$\varepsilon \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \text{rot} \mathbf{E} = 0$$

$$\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \text{div} \mathbf{D} = \rho$$

$$\text{rot}(\text{grad } u) = 0$$

$$\mathbf{E} = \pm \text{grad } u$$

u – potencjał/(skalarny) potencjał elektryczny.

$\mathbf{E} = -\text{grad } u = -\nabla u \rightarrow \mathbf{E}$ skierowany w stronę malejących potencjałów

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} // \text{ (zał. jednorodność materiałowa)}$$

$$\nabla \cdot -\nabla u = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\underbrace{\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

Równanie Poissona

; dla $\rho = 0$

$$\underbrace{\nabla^2 u = 0}$$

Równanie Laplace'a

Równanie Laplace'a

- Prawo Fouriera – strumień cieplny w środowisku przewodzącym ciepło jest proporcjonalny do gradientu rozkładu temperatury

$$\mathbf{q} = -k\nabla T \quad //(\mathbf{E} = -\epsilon\nabla u)$$

k – przewodność cieplna

- Zasada zachowania energii – dywergencja strumienia w dowolnym punkcie przestrzeni jest równa zero (co wpłynie to wypływa)

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad //(\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = 0)$$

(o ile w punkcie tym nie istnieje jakieś zewnętrzne źródło energii
 $\nabla \cdot \mathbf{q} = f$)



$$\nabla \cdot -k\nabla T = f$$

$$\nabla^2 T = -\frac{f}{k}$$

$$\nabla^2 T = 0$$

Równanie Laplace'a

$$\nabla^2 u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = f$$

W dowolnym punkcie obszaru rozbieżność wektorowego pola potencjalnego zależy od istnienia w nim źródeł pola.

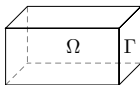
Zastosowania:

- elektrostatyka — potencjał elektrostatyczny V pod nieobecność ładunku elektrycznego spełnia równanie Laplace'a,
- termodynamika — przepływ statyczny ciepła,
- mechanika płynów — przepływ bezwrotny cieczy,
- elektrodynamika — przepływ prądu w ośrodkach rozciągniętych,
- mechanika — opisuje odkształcenia membran sprężystych

Obliczenie rozkładu pola elektrycznego $\mathbf{E}$ w pewnym obszarze Ω jest równoważne wyznaczeniu potencjału u , a więc rozwiązywaniu równania Poissona/Laplace'a przy spełnieniu pewnych warunków brzegowych na brzegu Γ (zagadnienie brzegowe).

Rozwiązanie równanie Laplace'a $\rightarrow$ funkcja harmoniczna

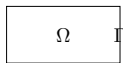
Równania różniczkowe cząstkowe – równanie Laplace'a



$$u = u(x, y, z)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

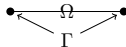
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z)$$



$$u = u(x, y)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$



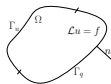
$$u = u(x)$$

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x)$$

+ warunki brzegowe:

- dane u w a i/lub b (Dirichleta) (potencjał elektryczny, temperatura, ...)
- dane $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ tj. $\frac{du}{dx}$ w a i/lub b (Neumanna) (gęstość rozłożenia ładunku elektrycznego na brzegu, gęstość strumienia ciepła)
- znana jest zależność pomiędzy u i $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ w a lub b (Robina)

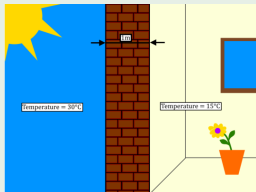


Równanie Laplace'a 1D

$$\nabla^2 u = \frac{d^2 u}{dx^2} = 0$$

+ obszar $\Omega \rightarrow [a, b]$, $a, b \in \mathcal{R}$

Example



Zagadnienie brzegowe:

$$\begin{cases} \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \\ T(0) = 30 \\ T(1) = 15 \end{cases}$$

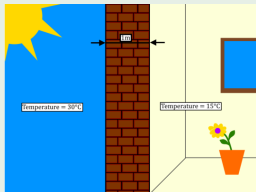
($\rightarrow$ analogia elektryczna?)

Równanie Laplace'a 1D

$$\nabla^2 u = \frac{d^2 u}{dx^2} = 0$$

+ obszar $\Omega \rightarrow [a, b]$, $a, b \in \mathcal{R}$

Example



Zagadnienie brzegowe:

$$\begin{cases} \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \\ T(0) = 30 \\ T(1) = 15 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} dx &= \int 0 dx \\ \int \frac{\partial T(x)}{\partial x} dx &= \int C_1 dx \\ T(x) &= C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 30 = C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 30 \\ 15 = C_1 \cdot 1 + C_2 \Rightarrow C_1 = -15 \end{cases}$$

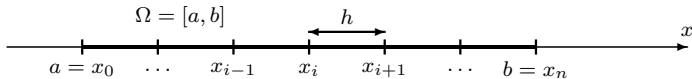
$$T(x) = -15x + 30$$

($\rightarrow$ analogia elektryczna?)

Równanie Laplace'a 1D

$$\nabla^2 u = \frac{d^2 u}{dx^2} = 0$$

+ obszar $\Omega \rightarrow [a, b]$, $a, b \in \mathcal{R}$



x_i – węzły równomiernie rozmieszczone, a więc

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = h$$

$$\nabla^2 u = \frac{d^2 u}{dx^2} = u''(x) = 0$$

- II. różn. w przód (progresywny)

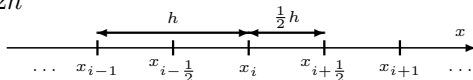
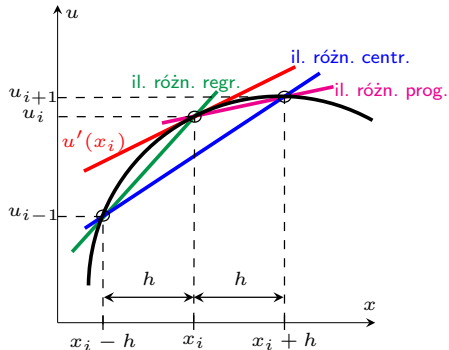
$$u'_i \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

- II. różn. w tył (regresywny)

$$u'_i \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$$

- II. różn. centralny

$$u'_i \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$



$$u'_{i-\frac{1}{2}} \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{2 \cdot \frac{1}{2}h}; \quad u'_{i+\frac{1}{2}} \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{2 \cdot \frac{1}{2}h}; \rightarrow$$

$$u''_i = (u'_i)' \approx \frac{u'_{i+\frac{1}{2}} - u'_{i-\frac{1}{2}}}{2 \cdot \frac{1}{2}h} = \frac{\frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h}}{h} = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}$$

Przykład

Niech dany będzie jednorodny stalowy pręt o długości 0.1 m, izolowanej powierzchni bocznej, o znikomej średnicy przekroju. Druk jest podgrzewany na lewym krańcu do temperatury 100 stopni. Przez prawy koniec ciepło jest odbierane ("wypływa") poprzez kontakt z innym ciałem, a gęstość (liniowa) strumienia ciepła wynosi $q = \partial T / \partial n = -300 \text{ W/m}$. Jak wyglądał będzie rozkład temperatury w drucie?



$$\nabla^2 T = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

$$T(0) = 100$$

$$\frac{\partial T(0.1)}{\partial n} = \frac{dT(0.1)}{dx} = -300$$

$$T = 100 \quad \nabla^2 T = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial n} = -300$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{x=0 \hspace{10em} x=0.1}$

Przykład

Niech dany będzie jednorodny stalowy pręt o długości 0.1 m, izolowanej powierzchni bocznej, o znikomej średnicy przekroju. Drut jest podgrzewany na lewym krańcu do temperatury 100 stopni. Przez prawy koniec ciepło jest odbierane ("wypływa") poprzez kontakt z innym ciałem, a gęstość (liniowa) strumienia ciepła wynosi $q = \partial T / \partial \mathbf{n} = -300 \text{ W/m}$. Jak wyglądał będzie rozkład temperatury w drucie?



$$\nabla^2 T = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

$$T(0) = 100$$

$$\frac{\partial T(0.1)}{\partial n} = \frac{dT(0.1)}{dx} = -300$$

Dyskretyzacja zagadnienia

$$\begin{array}{ccccccc}
 T = 100 & & \nabla^2 T = 0 & & \frac{\partial T}{\partial n} = -300 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5
 \end{array}$$

$$T_i = T(x_i)$$

$$h = (x_5 - x_1)/4 = 0.025 \text{ m}$$

$$T_1 = 100[^\circ\text{C}]$$

$$h = 0.1/5[\text{m}] = 0.02[\text{m}]$$

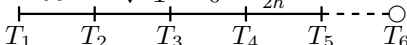
$$\begin{array}{ccccc} T = 100 & & \nabla^2 T = 0 & & \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = -300 \\ | & | & | & | & | \\ T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 \end{array}$$

$$\nabla^2 T_i = \frac{d^2 T(x_i)}{dx^2} = T_i''$$

$$T_i'' = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} = 0 \quad \text{dla } i = 2, 3, 4, \dots 5(?)$$

$$T_1 = 100[^\circ\text{C}]$$

$$h = 0.1/5[\text{m}] = 0.02[\text{m}]$$

$$T = 100 \quad \nabla^2 T = 0 \quad \frac{T_6 - T_4}{2h} = -300$$


x_6 – węzeł fikcyjny (ang. ghost node)

$$\nabla^2 T_i = \frac{d^2 T(x_i)}{dx^2} = T_i''$$

$$T_i'' = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} = 0 \quad \text{dla } i = 2, 3, 4, \dots 5(?)$$

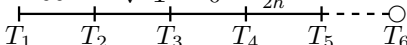
$$\frac{dT_i}{dx} = T_i' = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2h}$$

$\rightarrow$

$$\frac{dT_5}{dx} = T_5' = \frac{\partial T_5}{\partial \mathbf{n}} = \frac{T_6 - T_4}{2h}$$

$$T_1 = 100[^\circ\text{C}]$$

$$h = 0.1/5[\text{m}] = 0.02[\text{m}]$$

$$T = 100 \quad \nabla^2 T = 0 \quad \frac{T_6 - T_4}{2h} = -300$$


x_6 – węzeł fikcyjny (ang. ghost node)

$$\nabla^2 T_i = \frac{d^2 T(x_i)}{dx^2} = T_i''$$

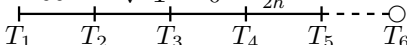
$$T_i'' = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} = 0 \quad \text{dla } i = 2, 3, 4, \dots, 5(?)$$

$$\frac{dT_i}{dx} = T_i' = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2h} \quad \rightarrow \quad \frac{dT_5}{dx} = T_5' = \frac{\partial T_5}{\partial \mathbf{n}} = \frac{T_6 - T_4}{2h}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 T_1 & & & & = & 100 \\
 T_1 & -2T_2 & +T_3 & & = & 0/ \cdot h^2 \\
 & T_2 & -2T_3 & +T_4 & = & 0/ \cdot h^2 \\
 & & T_3 & -2T_4 & +T_5 & = & 0/ \cdot h^2 \\
 & & & T_4 & -2T_5 & +T_6 & = & 0/ \cdot h^2
 \end{array} \quad (4)$$

$$T_1 = 100[^\circ\text{C}]$$

$$h = 0.1/5[\text{m}] = 0.02[\text{m}]$$

$$T = 100 \quad \nabla^2 T = 0 \quad \frac{T_6 - T_4}{2h} = -300$$


x_6 – węzeł fikcyjny (ang. ghost node)

$$\nabla^2 T_i = \frac{d^2 T(x_i)}{dx^2} = T_i''$$

$$T_i'' = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} = 0 \quad \text{dla } i = 2, 3, 4, \dots 5(?)$$

$$\frac{dT_i}{dx} = T_i' = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2h} \quad \rightarrow \quad \frac{dT_5}{dx} = T_5' = \frac{\partial T_5}{\partial \mathbf{n}} = \frac{T_6 - T_4}{2h}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 T_1 & & & & = 100 \\
 T_1 & -2T_2 & +T_3 & & = 0/ \cdot h^2 \\
 & T_2 & -2T_3 & +T_4 & = 0/ \cdot h^2 \\
 & & T_3 & -2T_4 & +T_5 = 0/ \cdot h^2 \\
 & & & T_4 & -2T_5 & +T_6 = 0/ \cdot h^2
 \end{array} \quad (4)$$

$$\frac{dT_5}{dx} = T_5' = -300 = \frac{T_6 - T_4}{2h} \quad \rightarrow \quad T_6 = -300 \cdot 2h + T_4$$

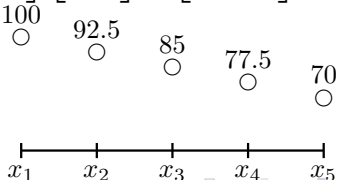
$$T_4 - 2T_5 + (-300 \cdot 2h + T_4) = 0 \quad \rightarrow \quad 2T_4 - 2T_5 = 12$$

$$\begin{aligned}
 T_1 &= 100 \\
 -2T_2 + T_3 &= -100 \\
 T_2 - 2T_3 + T_4 &= 0 \\
 T_3 - 2T_4 + T_5 &= 0 \\
 2T_4 - 2T_5 &= 12
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 92.5 \\ 85 \\ 77.5 \\ 70 \end{bmatrix} \tag{8}$$

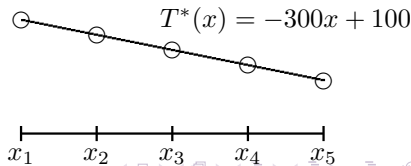


$$\begin{aligned}
 T_1 &= 100 \\
 -2T_2 + T_3 &= -100 \\
 T_2 - 2T_3 + T_4 &= 0 \\
 T_3 - 2T_4 + T_5 &= 0 \\
 2T_4 - 2T_5 &= 12
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 92.5 \\ 85 \\ 77.5 \\ 70 \end{bmatrix} \tag{8}$$



Warunek Neumanna z lewej strony $\rightarrow$ dla x_1

$$\nabla T|_{x=x_1} = T_1'' = \frac{T_2 - 2T_1 + T_0}{h^2} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n}|_{x=x_1} = -\frac{dT}{dx} = -\frac{T_2 - T_0}{2h} = \text{wbLw} \quad (10)$$

Rugujemy T_0 : z (10)

$$T_0 = T_2 + 2h \cdot \text{wbLw}$$

$$\frac{T_2 - 2T_1 + T_2 + 2h \cdot \text{wbLw}}{h^2} = 0$$

$$\frac{-2T_1 + 2T_2}{h^2} = -\frac{2h \cdot \text{wbLw}}{h^2}$$

Uwaga: jednoznaczność rozwiązania $\Leftrightarrow$ istnieje warunek Dirichleta

Zadanie:

- wymuszenie f - równanie Poissona

$$\nabla T = f(x)$$

↓

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} = f(x_i)$$

- warunki Robina (lewy i prawy)

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} + \bar{g}T = \bar{r}$$

↓

lewy:	prawy:
$\frac{T_6 - 2T_5 + T_4}{2h} = f(x_5)$ $\frac{T_6 - T_4}{2h} + \bar{g}(x_5)T_5 = \bar{r}(x_5)$	...

Równanie Laplace'a 2D

Zagadnienie brzegowe =

- równanie różniczkowe ...

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (11)$$

- ... + warunki brzegowe
 - warunek Dirichleta

$$u = \bar{u} \quad \text{na} \quad \Gamma_u$$

- warunek Neumanna

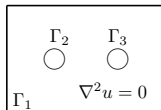
$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \bar{q} \quad \text{na} \quad \Gamma_q$$

- warunek Robina

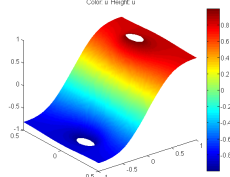
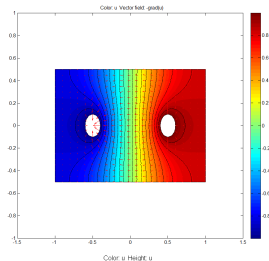
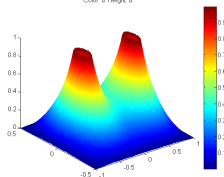
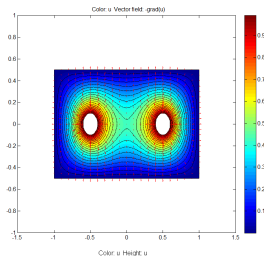
$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \bar{g}u = \bar{r} \quad \text{na} \quad \Gamma_r$$

Zagadnienia brzegowe 2D - przykłady

$$\begin{aligned}\Gamma_1 : u|_{\Gamma_1} &= 0 \\ \Gamma_2 : u|_{\Gamma_2} &= 1 \\ \Gamma_3 : u|_{\Gamma_3} &= 1\end{aligned}$$

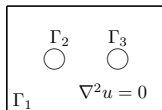


$$\begin{aligned}\Gamma_1 : \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_1} &= 0 \\ \Gamma_2 : u|_{\Gamma_2} &= -1 \\ \Gamma_3 : u|_{\Gamma_3} &= 1\end{aligned}$$

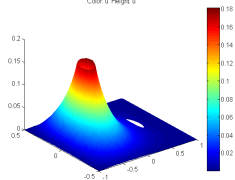
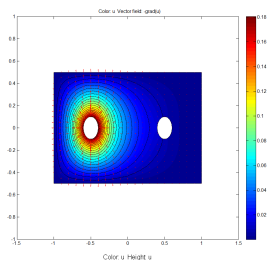
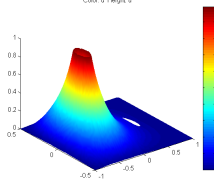
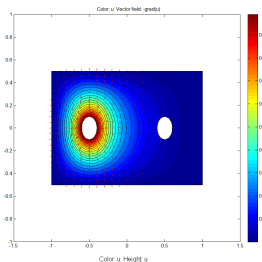


Zagadnienia brzegowe 2D - przykłady

$$\begin{aligned}\Gamma_1 : \quad u|_{\Gamma_1} &= 0 \\ \Gamma_2 : \quad u|_{\Gamma_2} &= 1 \\ \Gamma_3 : \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_3} &= 0\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\Gamma_1 : \quad u|_{\Gamma_1} &= 0 \\ \Gamma_2 : \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_2} &= 1 \\ \Gamma_3 : \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_3} &= 0\end{aligned}$$



Metoda różnic skończonych 2D

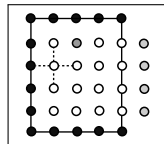
Pierwsza pochodna → dwupunktowy iloraz różnicowy centralny pierwszego rzędu

$$\left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right|_{x=x_i, y=y_j} \approx \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x}$$


Druga pochodna → trzypunktowy iloraz różnicowy centralny drugiego rzędu

$$\left. \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \right|_{x=x_i, y=y_j} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2}$$


$$\left. \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right|_{x=x_i, y=y_j} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2}$$

Laplasjan → różnica pięciopunktowa (zał. $h_x = h_y = h$)

$$\nabla^2 u(x, y) \Big|_{x=x_i, y=y_j} = \left. \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \right|_{x=x_i, y=y_j} + \left. \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right|_{x=x_i, y=y_j}$$



$$\nabla^2 u(x, y) \Big|_{x=x_i, y=y_j} \approx \frac{1}{h^2} (u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1})$$

Warunek brzegowy (np. dla lewego brzegu obszaru)

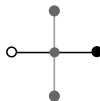
- Dirichleta: (funkcja w węzłach przyjmuje z góry zadaną wartość)

$$u(x_0, y) = f(y) \rightarrow u_{0,j} = f(y_j)$$

- Neumanna - realizacja warunku z wykorzystaniem węzła pomocniczego leżącego poza obszarem zagadnienia

$$\frac{\partial u(x_0, y)}{\partial n} = g(y) \rightarrow \frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2h} = g(y_j) \rightarrow$$

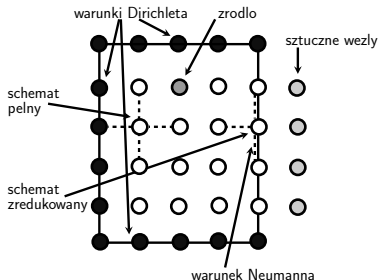
$$u_{-1,j} = u_{1,j} - 2hg(y_j)$$



Metoda różnic skończonych 2D

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (12)$$

$$\nabla^2 u_{i,j} = \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x_{i,j}^2} + \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y_{i,j}^2} = 0 \quad (13)$$



$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x_{i,j}^2} = u_{xx} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (14)$$

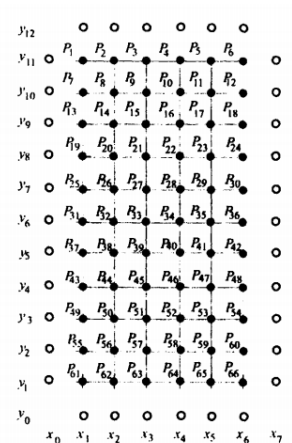
$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y_{i,j}^2} = u_{yy} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} \quad (15)$$

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0 \quad (16)$$

- dla punktów wewn. obszaru

$$u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0$$

Reindeksacja węzłów



$$u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0$$

$$P(x_i, y_j) = P_{i,j}$$

$$u(P_{i,j}) = u_{i,j}$$

Dla $P(x_2, y_{10})$, $i = 2$, $j = 10$

$$\nabla^2 u_{2,10} = u_{3,10} + u_{2,11} + u_{1,10} + u_{2,9} - 4u_{2,10}$$

$$(i, j) \leftrightarrow k$$

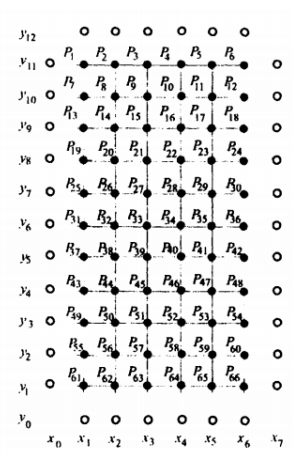
$$(2, 10) \leftrightarrow 8$$

$$u_9 + u_2 + u_7 + u_{14} - 4u_8 = 0$$

$$u_{8+1} + u_{8-6} + u_7 + u_{8+6} - 4u_8 = 0$$

$$u_{k+1} + u_{k-n_x} + u_{k-1} + u_{k+n_x} - 4u_k = 0$$

Warunki brzegowe



- warunek Dirichleta

$$u_k = \bar{u}_k$$

– możliwość usunięcia węzła (niewiadomej) z ukł. równań

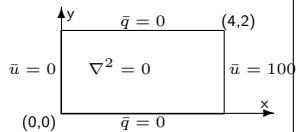
- warunek Neumanna

$$\frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}} = \bar{q}_k$$

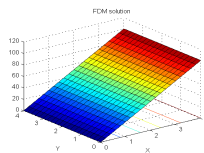
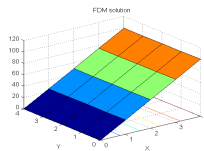
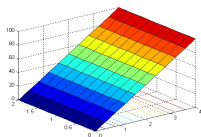
– rozważanie laplasjanu w P_k i usunięcie fikcyjnego węzła poprzez wprowadzenie warunku

- warunek Robina – j.w.

Prosty przykład



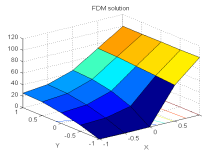
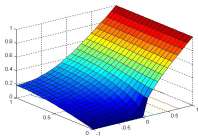
$$u = 25x$$



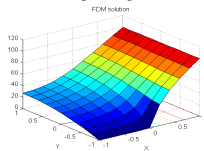
Problem Motz'a

$$\begin{array}{c} \bar{q} = 0 \\ \nabla^2 = 0 \\ \bar{u} = 100 \end{array} \quad \begin{array}{c} y \\ (1,1) \\ (0,0) \\ x \end{array}$$

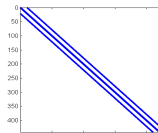
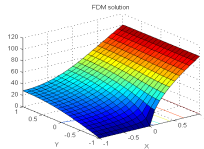
$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i r^{(2i-1)/2} \cos \left[\left(\frac{2i-1}{2} \right) \theta \right]$$



5 × 5



11 × 11

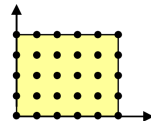


Podsumowanie - ogólna idea metody różnic skończonych

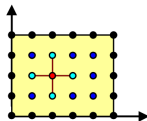
1. zapisanie równania różniczkowego w postaci różnicowej

$$\frac{du}{dx} \rightarrow \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$
$$\frac{d^2u}{dx^2} \rightarrow \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

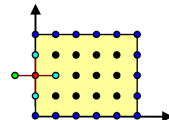
2. nałożenie siatki węzłów na obszar zagadnienia



3. ułożenie równania różnicowego dla każdego węzła wewnętrznego



4. wprowadzenie warunków brzegowych dla węzłów skrajnych



5. rozwiązanie powstałego URL ze względu na nieznane wartości węzłowe funkcji pola

Metoda różnic skończonych – podsumowanie

+

-

- możliwość rozwiązania dowolnego równania różniczkowego (zwykłego, cząstkowego, liniowego, nieliniowego)
- można stosować do ośrodków niejednorodnych i anizotropowych oraz do ośrodków nieliniowych
- łatwa pojęciowo i prosta w implementacji komputerowej
- rzadka macierz główna układu rzadka → (stosunkowo) małe wymagania co do pamięci → możliwość stosowania metod iteracyjnych rozwiązywania układów równań

- kłopoty z dopasowaniem siatki do obszaru o nieregularnym kształcie
- konieczność równomiernego podziału i związana z tym duża liczba węzłów
- poprawa dokładności obliczeń w zasadzie tylko przez zagęszczenie podziału, co prowadzi do olbrzymiej liczby węzłów (niewiadomych)

Dziękuję za uwagę