

Metody numeryczne

Wykład 10

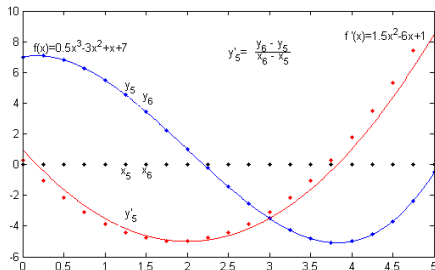
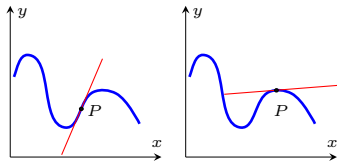
Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych

Pochodna

$$y', \frac{dy}{dx}, D_x y$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{x + \Delta x - x} \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \approx y'(x_i)$$



Przykład

$$y(x) = x^2$$

$$y'(x) = 2x$$

$$y(x) = x^2$$

$$y(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{x + \Delta x - x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x = 2x$$

Różniczkowanie numeryczne – Ilorazy różnicowe

Niech $y_i = y(x_i)$, $y'_i = y'(x_i)$, itd. ...

- Il. różn. w przód (progresywny)

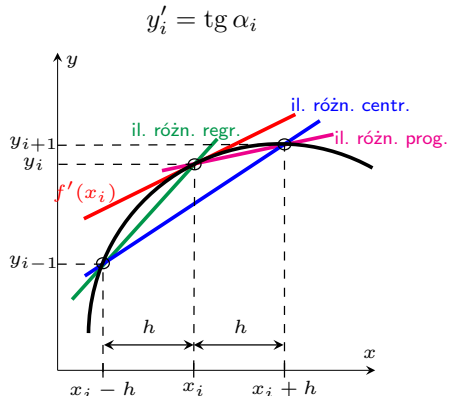
$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

- Il. różn. w tył (regresywny)

$$y'_i \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$

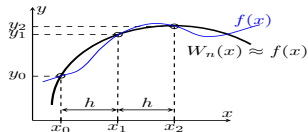
- Il. różn. centralny

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$



Różniczkowanie numeryczne – różniczkowanie funkcji aproksymującej

Wartości funkcji $f(x)$ stabilizowane
 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$



$$W(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad (1)$$

$$W(x) = y_0 \frac{x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{x^2 - xx_0 - xx_2 + x_0x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{x^2 - xx_0 - xx_1 + x_0x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad (2)$$

Różniczkowanie $W_n(x)$

$$W'(x) = y_0 \frac{2x - x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{2x - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{2x - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad (3)$$

$$W''(x) = y_0 \frac{2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad (4)$$

Dla węzłów równoodległych

$$W'(x) = y_0 \frac{2x - x_1 - x_2}{2h^2} + y_1 \frac{2x - x_0 - x_2}{-h^2} + y_2 \frac{2x - x_0 - x_1}{2h^2} \quad (5)$$

Dla węzłów równoodległych

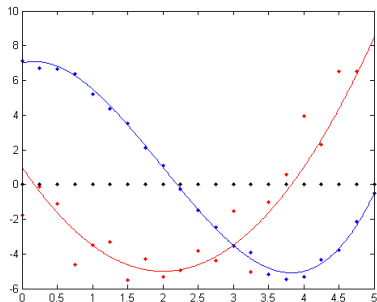
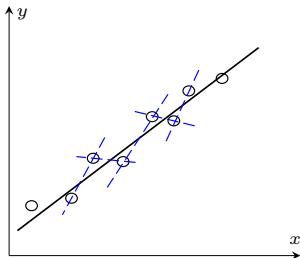
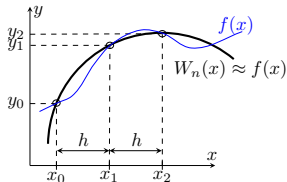
$$W'(x) = y_0 \frac{2x - x_1 - x_2}{2h^2} + y_1 \frac{2x - x_0 - x_2}{-h^2} + y_2 \frac{2x - x_0 - x_1}{2h^2} \quad (6)$$

$$W''(x) = \frac{y_0}{h^2} + \frac{2y_1}{h^2} + \frac{y_2}{h^2} \quad (7)$$

$$x = x_0 \Rightarrow W'(x) = -\frac{3y_0}{2h} + \frac{2y_1}{h} - \frac{y_2}{2h}$$

$$x = x_1 \Rightarrow W'(x) = -\frac{y_0}{2h} + \frac{y_2}{2h}$$

$$x = x_2 \Rightarrow W'(x) = -\frac{y_0}{2h} + \frac{2y_1}{h} - \frac{3y_2}{2h}$$



Błąd różniczkowania numerycznego

Niech będzie dana funkcja $f(x) = e^x$.

Korzystając z ilorazu różnicowego centralnego pochodną f' można wyrazić jako:

$$f'(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2), \text{ gdzie } x_{i+1} = h, x_{i-1} = -h$$

a więc dla punktu $x = 0$ otrzymać można

$$f'(0) = \frac{e^h - e^{-h}}{2h} + O(h^2)$$

Błąd zaokrąglenia wprowadzany w trakcie obliczeń komputerowych skutkuje:

$$e^h \rightarrow \underbrace{e^h}_{\text{wartości dokładne}} + R_1 \quad e^{-h} \rightarrow \underbrace{e^{-h}}_{\text{wartości dokładne}} + R_2$$

a więc

$$f'(0) = \frac{e^h + R_1 - e^{-h} + R_2}{2h} + O(h^2) = \frac{e^h - e^{-h}}{2h} + \underbrace{\frac{R_1 - R_2}{2h}}_{\text{Błąd zaokrąglenia}} + \underbrace{O(h^2)}_{\text{Błąd obcięcia}}$$

$$h \rightarrow 0, O(h^2) \rightarrow 0, \frac{R_1 - R_2}{2h} \rightarrow \infty$$



Równania różniczkowe zwyczajne

Równanie różniczkowe zwyczajne rzędu n :

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

- $F : D \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ jest zadana funkcja,
- x – zmienna niezależna
- $y', y'', \dots, y^{(n)}$ – kolejne pochodne szukanej funkcji

Równoważnie

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

gdzie $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$y(x), \dots, y^{(n)}(x) \rightarrow y, \dots, y^{(n)}.$$

Układ

$$y' = f(x, y) \quad x \in [a, b] \tag{8}$$

$$y(a) = y_a \tag{9}$$

nazywamy zagadnieniem początkowym (zagadnieniem Cauchy'ego) dla równania pierwszego rzędu.

Jeśli funkcja $f(x, y)$ nie zależy jawnie od x , tj. $y' = f(y)$ układ równanie (8)

nazywamy autonomicznym.

$$\begin{cases} y' &= -y^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} y &= y(t) \\ (t_0, y_0) &= (0, 1) \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dt} = -y^2 \quad (11)$$

$$-\frac{1}{y^2} dy = dt \quad (12)$$

$$\int -y^{-2} dy = \int dt \quad (13)$$

$$y^{-1} = t + C \quad (14)$$

$$y = \frac{1}{t + C} \quad (15)$$

Szukamy C wymuszając spełnienie warunków początkowych

$$y_0 = \frac{1}{t_0 + C} \quad (16)$$

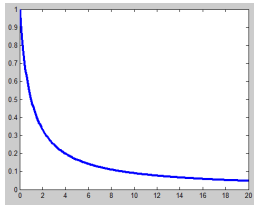
$$1 = \frac{1}{0 + C} \rightarrow C = 1$$

Ostatecznie:

$$y = \frac{1}{t + 1} \quad (17)$$

Sprawdźmy:

$$y' = \frac{-1}{(t+1)^2} = -\frac{1}{(t+1)^2} = -y^2$$



$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

$$y' = f(t, y(t)) \quad (18)$$

+ warunek początkowy:

$$y(t_0) = y_0 \quad (19)$$

$$y' = f \quad (20)$$

$$y'(t_i) = f(t_i, y(t_i)) \quad (21)$$

Podstawmy:

$$y_i = y(t_i)$$

$$f_i = f(t_i, y_i)$$

$$y'_i = y'(t_i)$$

$$y'_i = f_i \quad (22)$$

$$y'(t_i) \approx \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \quad (23)$$

$$y_{i+1} = y_i + f_i \cdot (t_{i+1} - t_i) \quad (24)$$

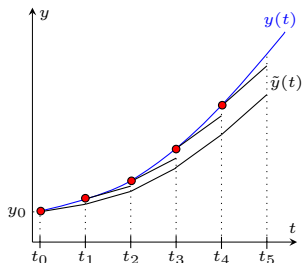
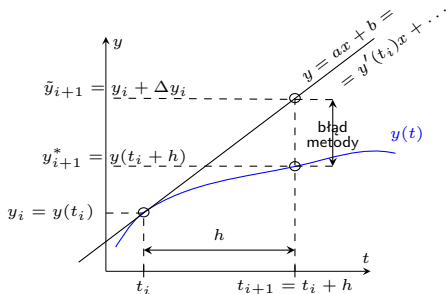
Metoda Eulera (łamanych)

$$y_{i+1} = y_i + f_i \cdot (t_{i+1} - t_i) \quad (25)$$

Najczęściej punkty t_i równoodległe

$$h = t_{i+1} - t_i \quad (26)$$

h – krok całkowania



$$\Delta y_i = h \cdot f_i \quad (27)$$

Δy_i – poprawka w i -tym kroku iteracji

Przykład

Wykonać dwie iteracje metody Eulera w celu rozwiązania równania:

$$\begin{cases} y' &= -y^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases} \quad (28)$$

Przyjąć krok całkowania $h = 0.1$.

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f_i \quad (29)$$

Z warunku początkowego:

$$t_0 = 0$$

$$y_0 = y(t_0) = 1$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f_0$$

$$f_0 = -y_0^2 = -1^2 = -1$$

$$y_1 = 1 + 0.1 \cdot (-1) = 0.9$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f_1$$

$$f_1 = -y_1^2 = -0.9^2 = -0.81$$

$$y_2 = 0.9 + 0.1 \cdot (-0.81) = 0.819$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot f_2$$

$$f_2 = -y_2^2 = -0.819^2 = \dots$$

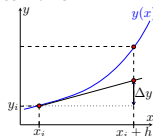
$$y_3 = \dots$$

Wersje metody Eulera

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (30)$$

Wersja podstawowa

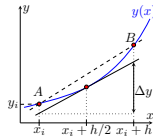
$$\Delta y_i = h \cdot f_i$$



Zmodyfikowana m.E. (m. punktu środkowego - midpoint)

$$\Delta y_i = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + f(x_i, y_i) \frac{h}{2}\right) h$$

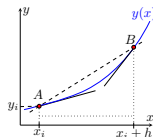
Styczna do łuku $\widehat{AB}$ w punkcie $x = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ jest "prawie" równoległa do cięciwy AB .



Udoskonalona m.E.

$$\Delta y_i = h \frac{f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + f(x_i, y_i)h)}{2}$$

Współczynnik kierunkowy stycznej AB jest "w przybliżeniu" średnią arytmetyczną współczynników kierunkowych stycznych w punktach A i B .



Metody Rungego-Kutty

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

- 1 rzędu

- $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i + k_1 \rightarrow \text{m.E.}$

- 2 rzędu

- $y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1) = y_i + k_2 \rightarrow \text{zmodyf. m.E.}$

- $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \rightarrow \text{udoskonalona m.E.}$

- 4 rzędu

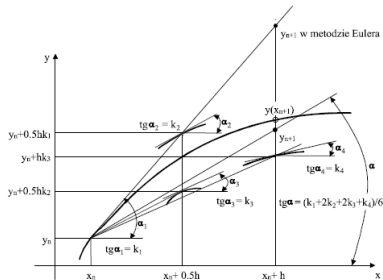
$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

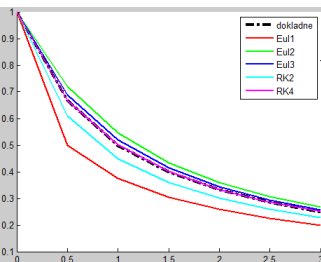
$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1)$$

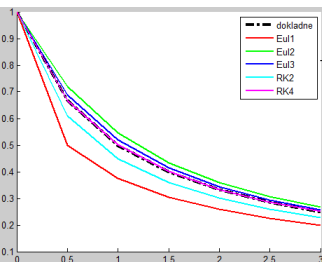
$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

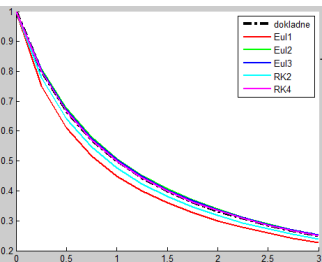




i	t_i	dokł.	mE	zm.mE	ud.mE	RK2	RK4
0	0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	0.5	0.6667	0.5000	0.7188	0.6875	0.6094	0.6667
2	1.0	0.5000	0.3750	0.5449	0.5184	0.4498	0.5000
3	1.5	0.4000	0.3047	0.4342	0.4144	0.3594	0.4000
4	2.0	0.3333	0.2583	0.3593	0.3445	0.3004	0.3334
5	2.5	0.2857	0.2249	0.3058	0.2945	0.2585	0.2857
6	3.0	0.2500	0.1996	0.2659	0.2570	0.2272	0.2500



i	t_i	dokł.	mE	zm.mE	ud.mE	RK2	RK4
0	0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	0.5	0.6667	0.5000	0.7188	0.6875	0.6094	0.6667
2	1.0	0.5000	0.3750	0.5449	0.5184	0.4498	0.5000
3	1.5	0.4000	0.3047	0.4342	0.4144	0.3594	0.4000
4	2.0	0.3333	0.2583	0.3593	0.3445	0.3004	0.3334
5	2.5	0.2857	0.2249	0.3058	0.2945	0.2585	0.2857
6	3.0	0.2500	0.1996	0.2659	0.2570	0.2272	0.2500



i	t_i	dokł.	mE	zm.mE	ud.mE	RK2	RK4
0	0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	0.25	0.8000	0.7500	0.8086	0.8047	0.7793	0.8000
2	0.5	0.6667	0.6094	0.6765	0.6721	0.6415	0.6667
3	0.75	0.5714	0.5165	0.5806	0.5765	0.5466	0.5714
4	1.0	0.5000	0.4498	0.5081	0.5046	0.4768	0.5000
5	1.25	0.4444	0.3992	0.4515	0.4484	0.4233	0.4445
6	1.5	0.4000	0.3594	0.4061	0.4035	0.3808	0.4000

Metody jednokrokowe - podsumowanie

$$\begin{cases} y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i, h); & x_i = a + ih; & i = 0, 1, \dots, n-1 \\ y_0 &= y_a \end{cases}$$

- Metoda Eulera $\rightarrow$ najprostsza (i najmniej dokładna) metoda numerycznego rozwiązywania r.r.
- Metoda RK4 $\rightarrow$ najdokładniejsza, najpopularniejsza
- Im mniejsze h tym lepsza dokładność rozwiązania, ale... bez przesady: brak ścisłych reguł doboru optymalnego kroku całkowania (metoda prób i błędów).

Korzystanie z ulepszeń metody łamanych daje wyniki nieporównywalnie lepsze.

Metody wielokrokowe - przykład

$$y'_i = f(x_i, y_i)$$

II. różn. w przód (progresywny)

metoda Eulera

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \rightarrow$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

II. różn. centralny

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \rightarrow$$

jawna metoda punktu
środkowego

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i)$$

metoda dwukrokowa

$$y_2 = y_0 + 2hf(x_1, y_1)$$

y_0 - z warunku początkowego

y_1 - ?

Metody wielokrokowe

$$\begin{cases} \alpha_k y_{i+k} + \dots + \alpha_1 y_{i+1} + \alpha_0 y_i = h \cdot (\beta_k f_{i+k} + \dots + \beta_1 f_{i+1} + \beta_0 f_i); & i = 0, 1, \dots, k-1 \\ y_j = y_j(h); & j = 0, 1, \dots, k-1 \end{cases}$$

(a) Adamsa-Bashfortha

jawne

$$r = 1,$$

$$l = 0,$$

$$y_{i+1} - y_i = h \sum_{j=0}^q \beta_{qj}^{(a)} f_{i-j}$$

(b) Adamsa-Moultona

niejawne

$$r = 0,$$

$$l = 1,$$

$$y_i - y_{i-1} = h \sum_{j=0}^q \beta_{qj}^{(b)} f_{i-j}$$

(c) Nyströma

niejawna

$$r = 1,$$

$$l = 1,$$

$$y_{i+1} - y_{i-1} = h \sum_{j=0}^q \beta_{qj}^{(c)} f_{i-j}$$

(d) Milne'a

jawna

$$r = 0,$$

$$l = 2,$$

$$y_i - y_{i-2} = h \sum_{j=0}^q \beta_{qj}^{(d)} f_{i-j}$$

Układy równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + \dots + b_{1m}u_m(t)$$

$$x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + b_{21}u_1(t) + \dots + b_{2m}u_m(t)$$

...

$$x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u_1(t) + \dots + b_{nm}u_m(t) \quad (31)$$

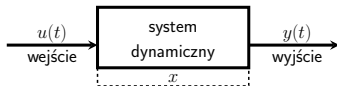
$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (32)$$

$\mathbf{x}(t)$ – wektor zmiennych stanu

$\mathbf{u}(t)$ – wektor zmiennych wejściowych

$\mathbf{A}$ – macierz stanu, o wymiarze $n \times n$

$\mathbf{B}$ – macierz o wymiarze $n \times m$



- równania stanu reprezentują dynamikę systemu
- są to równania różniczkowe pierwszego rzędu
- równania te wyrażają pierwszą pochodną po czasie wektora stanu jako ogólną nieliniową funkcję $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, wektora stanu i wejść

Metoda zmiennych stanu

Zagadnienie początkowe dla równania n -tego rzędu jest równoważne zagadnieniu początkowemu dla układu równań pierwszego rzędu

$$a_n y^{(n)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 x(t) = b_0 u(t) \quad (33)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'_n & = & f(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad x \in [a, b] \\ y'_{n-1} & = & y_n \\ \dots & & \\ y'_1 & = & y_2 \\ y_1(a) & = & y_a, \quad y_2(a) = y'_a, \dots, \quad y_n(a) = y_a^{(n-1)} \end{array} \right.$$

Przykład

$$\begin{cases} my_1''(t) + b_3y_1'(t) - b_1y_2(t) = u_1(t) \\ b_1y_2'(t) - b_1y_1'(t) + cy_1(t) = u_1(t) + u_2(t) \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{cases} z_1 = z_1(t) = y_1(t) \\ z_2 = z_2(t) = z_1'(t) = y_1'(t) \\ z_2' = z_2'(t) = y_1''(t) \\ z_3 = z_3(t) = y_2(t) \\ z_3' = z_3'(t) = y_2'(t) \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{cases} mz_2' + b_3z_2 - b_1z_3 = u_1 \\ b_1z_3' - b_1z_2 + cz_1 = u_1 + u_2 \end{cases} \quad (36)$$

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = \frac{1}{m}u_1 - \frac{b_3}{m}z_2 + \frac{b_1}{m}z_3 \\ z_3' = \frac{1}{b_1}u_1 + \frac{1}{b_1}u_2 + z_2 - \frac{c}{b_1}z_1 \end{cases} \quad (37)$$

Przykład

$$\begin{cases} 2y_1''(t) + 2y_1'(t) - 3y_2(t) = u_1(t) \\ 3y_2'(t) - 3y_1'(t) + 4y_1(t) = u_1(t) + u_2(t) \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{cases} z_1 = z_1(t) = y_1(t) \\ z_2 = z_2(t) = z_1'(t) = y_1'(t) \\ z_2' = z_2'(t) = y_1''(t) \\ z_3 = z_3(t) = y_2(t) \\ z_3' = z_3'(t) = y_2'(t) \end{cases} \quad (39)$$

$$\begin{cases} 2z_2' + 2z_2 - 3z_3 = u_1 \\ 3z_3' - 3z_2 + 4z_1 = u_1 + u_2 \end{cases} \quad (40)$$

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = \frac{1}{2}u_1 - \frac{2}{2}z_2 + \frac{3}{2}z_3 \\ z_3' = \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2 + z_2 - \frac{4}{3}z_1 \end{cases} \quad (41)$$

Przykład

Konwekcja termiczna w atmosferze – atraktor Lorenza (1963)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z.\end{aligned}\tag{42}$$

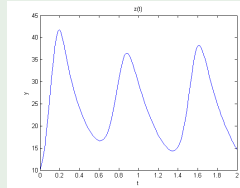
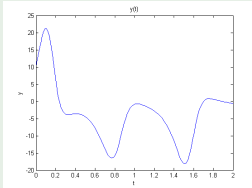
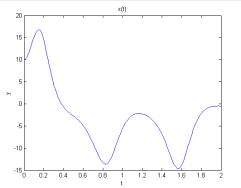
+RYS

σ – (liczba Prandtla) – charakteryzuje lepkość ośrodka,

ρ – (liczba Rayleigha) – charakteryzuje przewodnictwo ciepłe ośrodka,

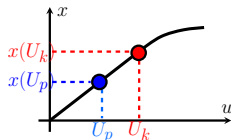
β – stała charakteryzująca rozmiary obszaru, w którym odbywa się przepływ konwekcyjny

$\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, $\rho = 28$

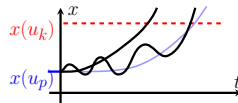
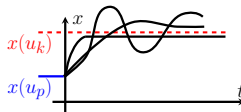
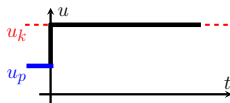


Opis układów fizycznych

- modele statyczne – zależność pomiędzy zmiennymi wejściowymi i wyjściowymi układu w warunkach równowagi (brak zmian na wejściu i wyjściu układu) → ch-ka statyczna (zależność wyjścia od wejścia)



- modele dynamiczne – reakcja układu na zmianę sygnału wejściowego → ch-ki czasowe



(a) Wymuszenie skokowe (b) Reakcja układu stabilnego i niestabilnego na wymuszenie skokowe

Liniowe r.r. n -tego rzędu

$$a_n x^{(n)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t)$$

→ zasada superpozycji

$$x(t) = x_s(t) + x_w(t)$$

$x_s(t)$ – rozwiązanie swobodne

$x_w(t)$ – rozwiązanie wymuszone

Rozwiązanie swobodne

$$a_n x^{(n)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$$

$$x_s(t) = Ae^{\lambda t}$$

$$a_n \lambda^n Ae^{\lambda t} + \dots + a_1 \lambda Ae^{\lambda t} + a_0 Ae^{\lambda t} = 0 \quad / : Ae^{\lambda t}$$

⇒ równanie charakterystyczne

$$a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (43)$$

pierwiastki (43) → bieguny układu

$x_s(t)$ = suma składowych wszystkich biegunów

Biegunki układu a składowe rozwiązania swobodnego

- $\lambda_i = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

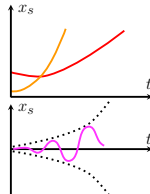
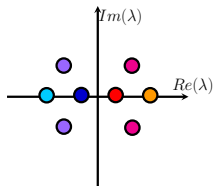
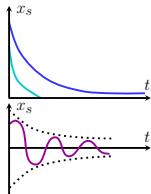
$$A_i e^{\lambda t}$$

- jeśli λ_i jest pierwiastkiem m -krotnym

$$(A_i + A_{i+1}t + A_{i+1}t^2 + \dots + A_{k+m-1}t^{m-1})e^{\lambda_i t}$$

- jeśli $\lambda_{i,i+1} = \alpha + j\omega$ – para pierwiastków zespolonych

$$A_1 e^{(\alpha+j\omega)t} + A_2 e^{(\alpha-j\omega)t} = A e^{\alpha t} \sin(\omega t + \phi)$$



jeśli dla $t \rightarrow \infty, x_s(t) \rightarrow 0 \Rightarrow$ układ stabilny $\Leftrightarrow \bigwedge_i \text{Re}(\lambda_i) < 0$

Rozwiązanie wymuszone

$$a_n x^{(n)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t)$$

$$x(t) = x_s(t) + \mathbf{x}_w(t)$$

$$\bigwedge_{i=1..n} x^{(i)} = 0$$

Równanie statyczne:

$$a_0 x(t) = b_0 u(t)$$

$\bigwedge_{i=1..n} x^{(i)} = 0$ – brak zmian w układzie, dla $t > 0$:

$$u(t) = u_0$$

$$x_w(t) = x_0 = \frac{b_0}{a_0} u_0$$

$\Leftrightarrow$ stan równowagi

(x_0, u_0) – punkt równowagi/pracy.

Dla układów liniowych istnieje jeden punkt równowagi.

Dla układów nieliniowych może być ich więcej.



Rozwiązanie ogólne dla wymuszenia skokowego/impulsowego
 $(u(t) = u_0 \text{ dla } t > 0)$

$$x(t) = x_s(t) + x_w(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + A_n e^{\lambda_n t} + x_0$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n, x_0$ – znane

$A_1, \dots, A_n$ – do wyznaczenia z warunków początkowych $\rightarrow$ rozwiązanie szczególne

Przykład

$$\begin{cases} a_2 x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t) \\ x(0) = c \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

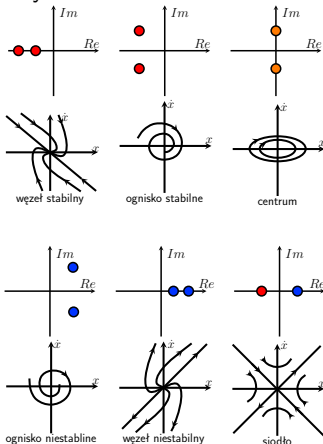
$$x = x_s + x_w = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + x_0$$

$$\begin{cases} A_1 e^{\lambda_1 0} + A_2 e^{\lambda_2 0} + x_0 = c \\ \lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 0} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 0} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 + x_0 = c \\ \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = 0 \end{cases}$$

$$A_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad A_2 = \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Portrety fazowe

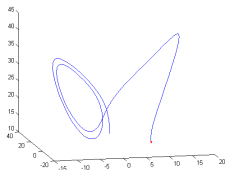
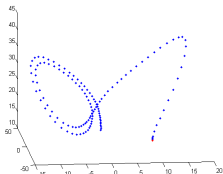
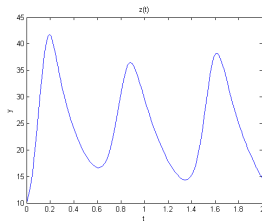
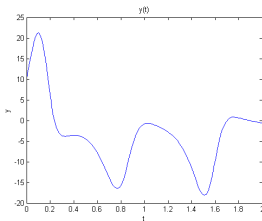
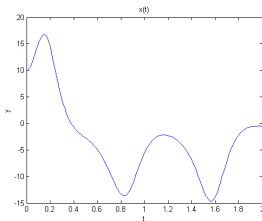
Portrety fazowe dla układów liniowych

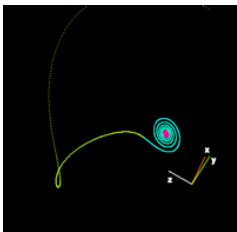


Układy nieliniowe

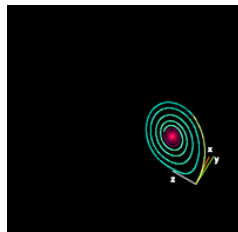
Atraktor Lorenza

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z.\end{aligned}\tag{44}$$

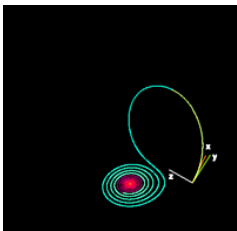




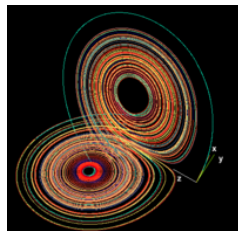
$$\rho = 14, \sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}$$



$$\rho = 13, \sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}$$



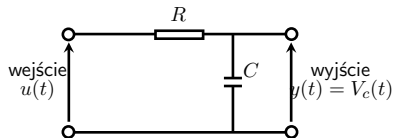
$$\rho = 15, \sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}$$



$$\rho = 28, \sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}$$

<http://www.youtube.com/watch?v=FYE4JKAXSfY>

Układ RC



Niech $y(t) = V_c(t)$ – zmienna wyjścia

Niech $u(t) = \sin(t)$, gdzie $t \geq t_0$, t_0 – chwila początkowa

Jak określić napięcie wyjściowe $y(t)$ dla $t \geq t_0$

$$u(t) = u_R(t) + u_C(t)$$

$$i(t) = \frac{dq_C}{dt}$$

$$q_C(t) = C u_C(t)$$

$$\frac{d}{dt} q_C(t) = \frac{d}{dt} C u_C(t) =$$

$$C \frac{du_C(t)}{dt} = i(t)$$

$$u_R(t) = R i(t) = RC \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$u(t) = RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$$

$$\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{RC} u(t) - \frac{1}{RC} u_C(t) \quad (45)$$

Układ RC

Oznaczmy zmienną stanu jako:

$$x \equiv u_C$$

oraz wyjście obiektu

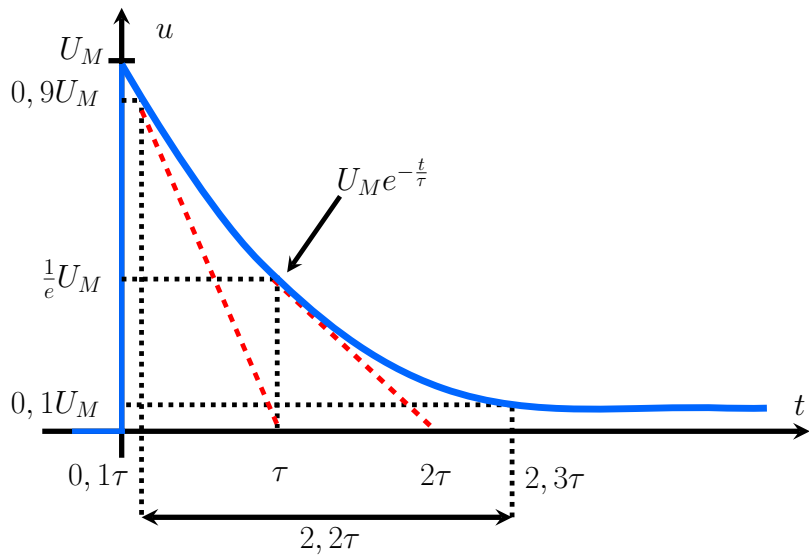
$$y \equiv u_C$$

$$\frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}u_C(t) + \frac{1}{RC}u(t)$$

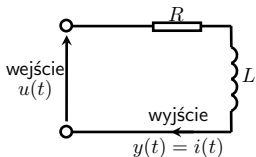
Opis w przestrzeni stanu:

$$\begin{cases} x'(t) &= -\frac{1}{RC}x(t) + \frac{1}{RC}u(t) & \text{równanie stanu} \\ y(t) &= x(t) & \text{równanie wyjścia} \end{cases} \quad (46)$$

Warunek początkowy: $x_0 = u_C(t_0)$ – wartość napięcia na kondensatorze zależna od zmagazynowanego na nim ładunku w chwili początkowej



Układ RL



$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = u(t)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{L}u(t)$$

Oznaczmy zmienną stanu jako:

$$x \equiv i$$

oraz wyjście obiektu

$$y \equiv i$$

Opis w przestrzeni stanu:

$$\begin{cases} x'(t) &= -\frac{R}{L}x(t) + \frac{1}{L}u(t) \\ y(t) &= x(t) \end{cases} \quad (47)$$

Dziękuję za uwagę