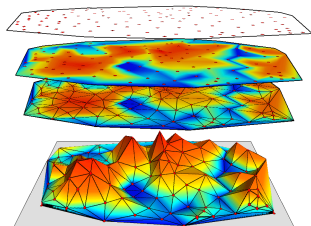


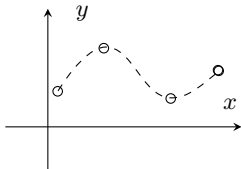
Metody numeryczne

Wykład 6 Interpolacja

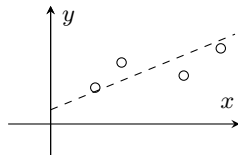


Pojęcia wstępne

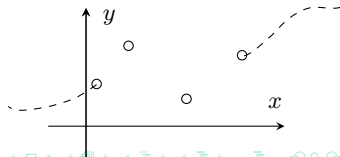
- interpolacja - szukanie wartości f-ji *wewnątrz* przedziału, "odtworzenie" brakujących informacji (np. wyników pomiarów → meteorologia, geodezja; numeryczne całkowanie/ różniczkowanie)



- aproksymacja – *przybliżenie* funkcji w przedziale, w którym dane są jej pewne wartości



- ekstrapolacja - szukanie wartości f-ji *poza* przedziałem z danymi (→ przewidywanie, prognozowanie: finanse, statystyka → ekstrapolacja trendów)



Interpolacja - sformułowanie problemu dla 1D

Danych jest $n + 1$ punktów (*węzłów interpolacji*)

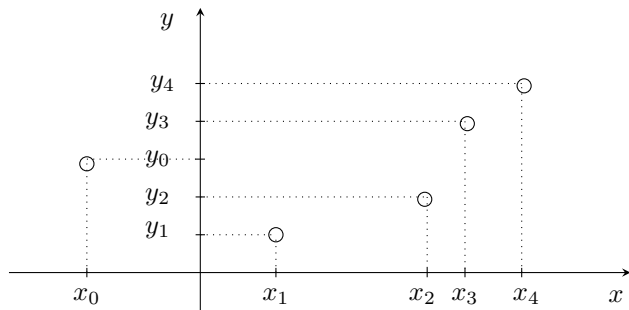
$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in \langle a, b \rangle$$

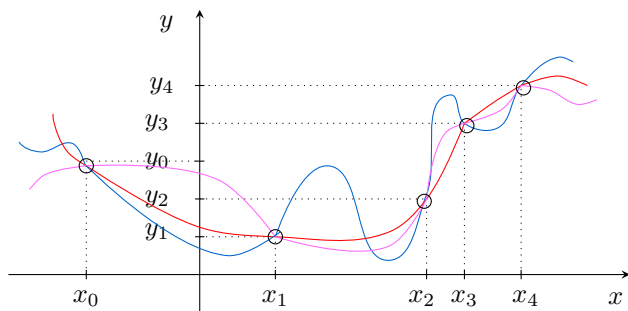
oraz wartości pewnej f-cji

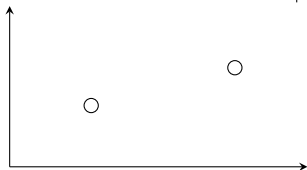
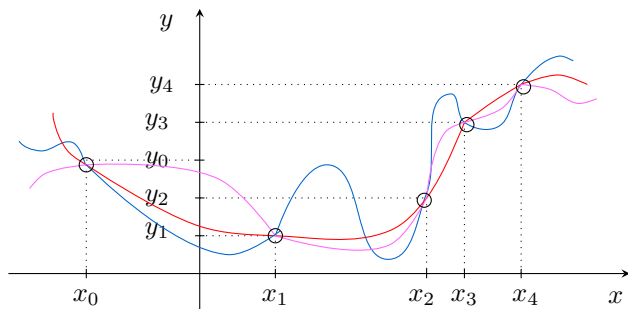
$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, y_i = y(x_i)$$

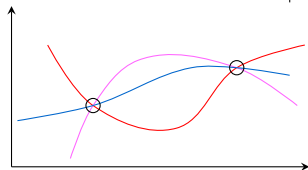
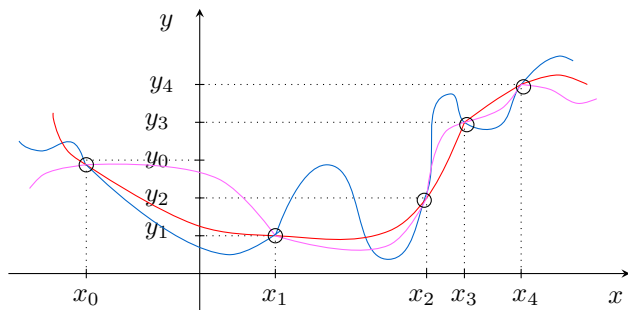
Zadanie:

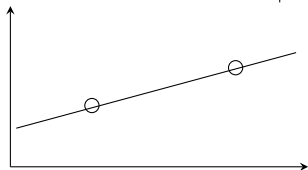
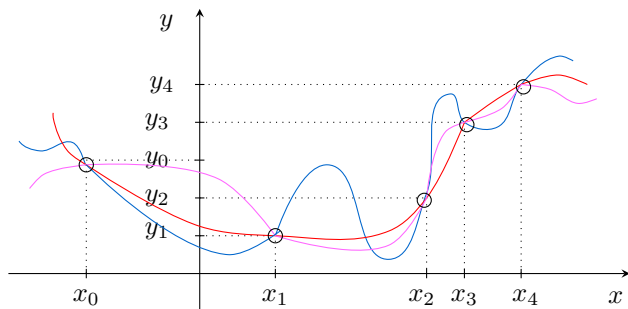
Znaleźć funkcję f , której wykres przechodzi przez punkty (x_i, y_i) ,
 $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

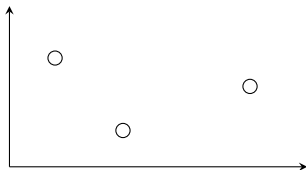
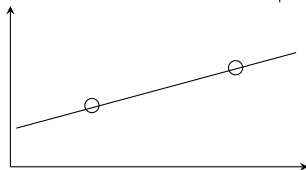
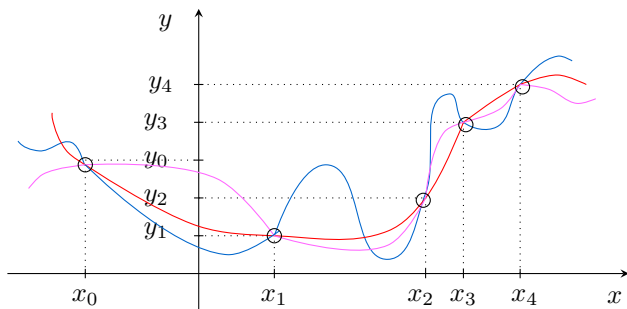


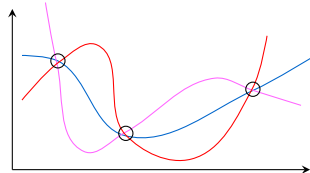
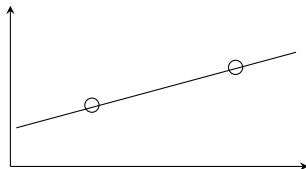
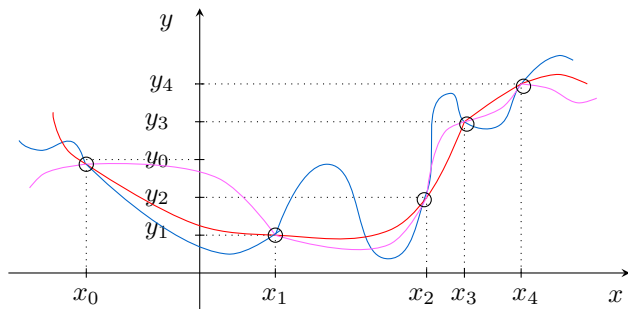


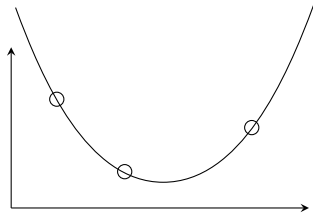
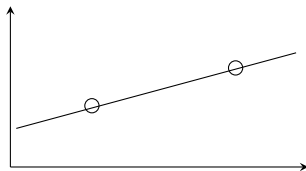
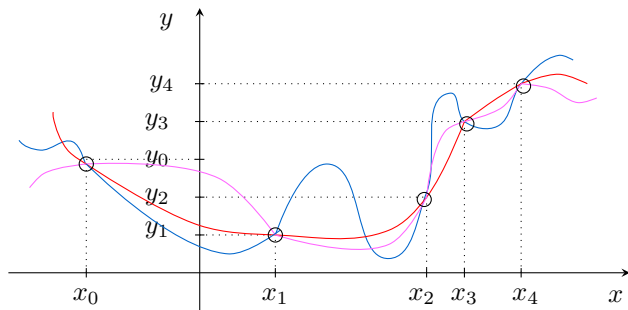












Ogólne sformułowanie zadania interpolacji

Funkcja jako kombinacja liniowa funkcji bazowych φ_i

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i \varphi_i(x) \quad (1)$$

Dla interpolacji wielomianowej ostateczna postać funkcji $P_n(x)$ ma być wielomianem maksymalnie n stopnia.

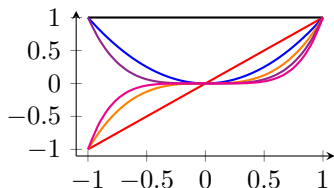
$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \dots a_nx^n \quad (2)$$

- Ustalenie funkcji bazowych φ_i na jednomiany kolejnego stopnia

$\varphi_i = \{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots, x^n\} \rightarrow$
macierz Vandermonde'a (zadanie
źle uwarunkowane).

Niewiadome współczynniki

$a_0, a_1, \dots, a_n$ obliczamy z układu
równań



Z warunku interpolacji wielomianowej wynika, że szukany jest wielomian:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \rightarrow y_i = a_0x_i + a_1x_i + \dots + a_nx_i^n$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

Macierz Vandermonde'a

Wyznacznik Vandermonde'a:

$$\det \mathbf{A} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Rozwiązanie układu (??) met. elim. Gaussa $O(n^3)$, wzór interpolacyjny Lagrange'a $\rightarrow O(n^2)$

Interpolacja wielomianowa - wzór interpolacyjny Lagrange'a

Wybór innych funkcji bazowych φ_i pozwalający na obliczenie wielomianu interpolującego w szybszy sposób. W interpolacji Lagrange'a funkcje bazowe oznaczone zostały przez ℓ_i a współczynnikami a_i są wartości w węzłach y_i .

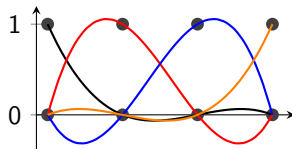
Twierdzenie

Dla $n + 1$ punktów (x_i, y_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ istnieje dokładnie jeden wielomian $P_n(x)$ stopnia co najwyżej n spełniający warunki interpolacji tj.

$$P_n(x_i) = y_i \quad (0 \leq i \leq n).$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \ell_i(x)$$

$$\begin{aligned} \ell_i(x) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \\ &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \end{aligned}$$



Dowód (na istnienie)

Szukana funkcja $P_n(x)$ to wielomian jak najmniejszego stopnia, która dla argumentów x_i przyjmuje odpowiadające im wartości y_i tzn., dla każdego i -tego punktu

$$P_n(x_i) = y_i \quad i = 0, \dots, n$$

Ponadto:

- w funkcji $\ell_i(x)$ istnieje n czynników (od 0 do n bez jednego) $\rightarrow \ell_i(x)$ będzie wielomianem stopnia $n \rightarrow P_n(x)$ jako suma wielomianów stopnia n również będzie miała taki sam stopień
- dla k -tego węzła wartość i -tej funkcji ℓ wynosi

$$\ell_i(x_k) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x_k - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{i-1})(x_k - x_{i+1}) \dots (x_k - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

jeśli $i = k$ wszystkie czynniki wynoszą $\frac{x_k - x_j}{x_k - x_j} = 1 \rightarrow P_n(x_k) = 1$

jeśli $i \neq k$ będzie istniał jeden czynnik $\frac{x_k - x_k}{x_i - x_k} = 0 \rightarrow P_n(x_k) = 0$

$$\ell_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = k \\ 0, & \text{if } i \neq k \end{cases} \text{ gdzie } \delta_{ij} \text{ - delta Kroneckera.}$$

ℓ_i - funkcja, która przyjmuje wartość 1 w węźle x_i i 0 we wszystkich pozostałych węzłach

$$L(x_i) = \sum_{j=0}^k y_j \ell_j(x_i) = \sum_{j=0}^k y_j \delta_{ji} = y_i.$$

A więc $P_n(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej n , dla którego $P_n(x_i) = y_i$ dla $i = 0, 1, \dots, n$

Dowód (jednoznaczności)

Niech Π_n ozn. zbiór wszystkich wielomianów stopnia co najwyżej n , czyli wielomianów postaci $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$.

Założmy, że istnieją dwa wielomiany P_n i Q_n z klasy Π_n , które spełniają warunek interpolacji. Niech $R_n = P_n - Q_n$. Wielomian R_n znika w $n + 1$ różnych punktach x_i . Jednak wielomian z Π_n nie znikający tożsamościowo ma co najwyżej n zer, a więc $P_n \equiv Q_n$, c.n.d.

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_i - x_1} \cdots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_i - x_n}$$

Dane: X, Y, x, n

Wyniki: P_x

$P_x = 0;$

for $i \leftarrow 0$ to n **do**

$\ell_i = 1;$

for $j \leftarrow 0$ to n **do**

if $i \neq j$ **then**

$\ell_i = \ell_i \cdot (x - X(j)) / (X(i) - X(j));$

end if

end for

$P_x = P_x + Y(i) \cdot \ell_i;$

end for

Uwaga! W Octave tę funkcję można zdefiniować tak, aby x było wektorem (Pamiętać o operatorach tablicowych!):

$l_i = l_i .* (x - X(j)) ./ (X(i) - X(j))$

Przykład

Wyznacz wielomian interpolacyjny przechodzący przez punkty:

x_i	y_i
-2	3
1	1
2	-3
4	8

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= 3 \frac{\cancel{x+2}(x-1)(x-2)(x-4)}{\cancel{x+2}(-2-1)(-2-2)(-2-4)} + 1 \frac{(x+2)\cancel{x-1}(x-2)(x-4)}{(1+2)\cancel{1-1}(1-2)(1-4)} \\
 &\quad + (-3) \frac{(x+2)(x-1)\cancel{x-2}(x-4)}{(2+2)(2-1)\cancel{2-2}(2-4)} + 8 \frac{(x+2)(x-1)(x-2)\cancel{x-4}}{(4+2)(4-1)(4-2)\cancel{4-4}} \\
 &= -\frac{1}{24}x^3 + \frac{7}{24}x^2 - \frac{7}{12}x + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{16}{9} \\
 &\quad + \frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{8}x^2 - \frac{9}{4}x + 3 + \frac{2}{9}x^3 - \frac{2}{9}x^2 - \frac{8}{9}x + \frac{8}{9} = \\
 &\quad \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{25}{6}x + 6
 \end{aligned}$$

W przypadkach rzeczywistych staramy się uniknąć obliczania wzoru

Błąd wzoru interpolacyjnego

Twierdzenie

Błąd interpolacji wielomianowej:

Niech $f \in C^{n+1}[a, b]$ i niech $W_n(x) \in \Pi_n$ będzie wielomianem interpolacyjnym na węzłach $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$.

$$|f(x) - W_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_n(x)|$$

gdzie

$$M_{n+1} = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} |f^{n+1}(x)|$$

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

$f(x)$ – interpolowana funkcja

Przykład

Z jaką dokładnością można obliczyć wartość funkcji $\sin(x)$ stosując wzór interpolacyjny Lagrange'a dla węzłów $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$?

$$|f(x) - W_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_n(x)|$$

$$\begin{aligned} n &= 3 \\ a &= 0 \\ b &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \\ f'(x) &= \cos(x) \\ f''(x) &= -\sin(x) \\ f^{(3)}(x) &= -\cos(x) \\ f^{(4)}(x) &= \sin(x) \end{aligned}$$



$$M_4 = \sup_{x \in <0, \frac{\pi}{3}>} |\sin x| = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|\sin x - W_n(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4!} \left| (x-0)(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3}) \right|$$

np. dla $x = \frac{\pi}{5}$ błąd będzie wynosił

$$\left| \sin \frac{\pi}{5} - W_n \left(\frac{\pi}{5} \right) \right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4!} \left| \left(\frac{\pi}{5} - 0 \right) \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6} \right) \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{3} \right) \right| \approx 1.5622 \cdot 10^{-4}$$

Metoda Aitkena

$W_{i,j}(x)$ – wielomian stopnia pierwszego, który w węzłach x_i, x_j przyjmuje wartości y_i, y_j

$$W_{i,j}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_i & x_i - x \\ y_j & x_j - x \end{vmatrix}}{x_j - x_i} = \frac{y_i(x_j - x) - y_j(x_i - x)}{x_j - x_i}$$

$W_{i,j,k}(x)$ – wielomian stopnia drugiego przechodzący przez punkty $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k$.

$$W_{i,j,k}(x) = \frac{\begin{vmatrix} W_{i,j}(x) & x_j - x \\ W_{i,k}(x) & x_k - x \end{vmatrix}}{x_k - x_j}$$

$W_{0,1,\dots,n-1,n}(x)$ – wielomian stopnia n -tego przechodzący przez punkty $x_i, y_i, i = 0, 1, \dots, n$.

$$W_{0,1,\dots,n-1,n}(x) = \frac{\begin{vmatrix} W_{0,1,\dots,n-2,n-1}(x) & x_{n-1} - x \\ W_{0,1,\dots,n-2,n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}}{x_n - x_{n-1}}$$

Schemat Aitkena

x_0	y_0					
x_1	y_1	$W_{0,1}$				
x_2	y_2	$W_{0,2}$	$W_{0,1,2}$			
x_3	y_3	$W_{0,3}$	$W_{0,1,3}$	$W_{0,1,2,3}$		
x_4	y_4	$W_{0,4}$	$W_{0,1,4}$	$W_{0,1,2,4}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	
x_n	y_n	$W_{0,n}$	$W_{0,1,n}$	$W_{0,1,2,n}$	$\dots$	$W_{0,1,2,3,\dots,n}$

Przykład

Wyznaczyć wartość wielomianu interpolacyjnego w punkcie $x = -1$ jeśli wielomian ten przechodzi przez punkty $(-2, 3)$, $(1, 1)$, $(2, -3)$, $(4, 8)$,

$$\begin{array}{cc} -2 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & W_{0,1} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & -3 & W_{0,2} & W_{0,1,2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 8 & W_{0,3} & W_{0,1,3} & W_{0,1,2,3} \end{array}$$

$$W_{0,1} = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 + 1 \\ 1 & 1 + 1 \end{vmatrix}}{1 + 2} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{6+1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$W_{0,2} = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 + 1 \\ -3 & 2 + 1 \end{vmatrix}}{2 + 2} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$W_{0,3} = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_3 & x_3 - x \end{vmatrix}}{x_3 - x_0} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 + 1 \\ 8 & 4 + 1 \end{vmatrix}}{4 + 2} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}}{6} = \frac{15+8}{6} = \frac{23}{6}$$

Przykład

$$\begin{array}{cccc}
 -2 & 3 & & \\
 1 & 1 & 7/3 & \\
 2 & -3 & 3/2 & W_{0,1,2} \\
 4 & 8 & 23/6 & W_{0,1,3} \quad W_{0,1,2,3}
 \end{array}$$

$$W_{0,1,2} = \frac{\begin{vmatrix} W_{0,1} & x_1 - x \\ W_{0,2} & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_1} = \frac{\begin{vmatrix} 7/3 & 1 + 1 \\ 3/2 & 2 + 1 \end{vmatrix}}{2 - 1} = \frac{\begin{vmatrix} 7/3 & 2 \\ 3/2 & 3 \end{vmatrix}}{1} = \frac{7-3}{1} = 4$$

$$\begin{aligned}
 W_{0,1,3} &= \frac{\begin{vmatrix} W_{0,1} & x_1 - x \\ W_{0,3} & x_3 - x \end{vmatrix}}{x_3 - x_1} = \frac{\begin{vmatrix} 7/3 & 1 + 1 \\ 23/6 & 4 + 1 \end{vmatrix}}{4 - 1} = \frac{\begin{vmatrix} 7/3 & 2 \\ 23/6 & 5 \end{vmatrix}}{3} = \\
 \frac{35/3 - 46/6}{3} &= \frac{70/6 - 46/6}{3} = \frac{24/6}{3} = 4/3
 \end{aligned}$$

Przykład

$$\begin{array}{cccc}
 -2 & 3 & & \\
 1 & 1 & 8/3 & \\
 2 & -3 & 3 & 4 \\
 4 & 8 & 2^{3/6} & 4/3 \quad W_{0,1,2,3}
 \end{array}$$

$$W_{0,1,2,3} = \frac{\begin{vmatrix} W_{0,1,2} & x_2 - x \\ W_{0,1,3} & x_3 - x \end{vmatrix}}{x_3 - x_2} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 + 1 \\ 4/3 & 4 + 1 \end{vmatrix}}{4 - 2} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4/3 & 5 \end{vmatrix}}{2} = \frac{20 - 4}{2} = 8$$

Sprawdzenie:

$$P_n(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{25}{6}x + 6$$

$$P_n(-1) = 8$$

Wzór interpolacyjny Newtona

Twierdzenie

Każdy wielomian $W_n(x)$ stopnia co najwyżej n , którego wykres przechodzi przez punkty (x_i, y_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ można przedstawić jednoznacznie za pomocą wzoru

$$W_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1}) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \quad (5)$$

gdzie współczynniki c_i są równe $f_i(x_i)$, gdzie

$$c_i = f_i(x_i) = \begin{cases} f(x_i) = y_i & \text{dla } i = 0 \\ \frac{f_{i-1}(x_i) - f_{i-1}(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} & \text{dla } i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (6)$$

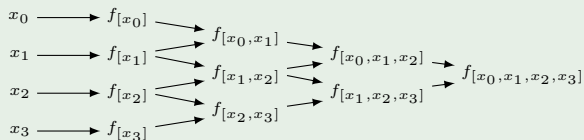
(??) $\rightarrow$ (??)

$$W_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i(x_i)(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{i-1})$$

$$\varphi_i = \left\{ \begin{array}{l} 1, \\ (x - x_0), \\ (x - x_0)(x - x_1), \\ \dots, \\ (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \end{array} \right\}$$

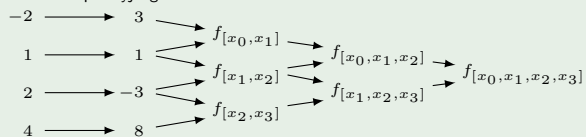
Przykład

Wyznacz wielomian interpolacyjny przechodzący przez punkty: $(-2, 3)$, $(1, 1)$, $(2, -3)$, $(4, 8)$ przy pomocy wzoru interpolacyjnego Newtona.



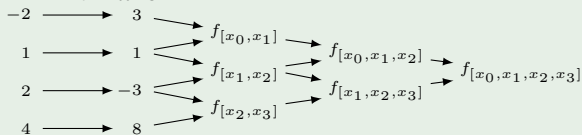
Przykład

Wyznacz wielomian interpolacyjny przechodzący przez punkty: $(-2, 3)$, $(1, 1)$, $(2, -3)$, $(4, 8)$ przy pomocy wzoru interpolacyjnego Newtona.



Przykład

Wyznacz wielomian interpolacyjny przechodzący przez punkty: $(-2, 3)$, $(1, 1)$, $(2, -3)$, $(4, 8)$ przy pomocy wzoru interpolacyjnego Newtona.



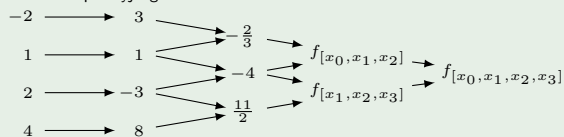
$$f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{1 - 3}{1 - (-2)} = -\frac{2}{3}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 1}{2 - 1} = -4$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} = \frac{8 - (-3)}{4 - 2} = \frac{11}{2}$$

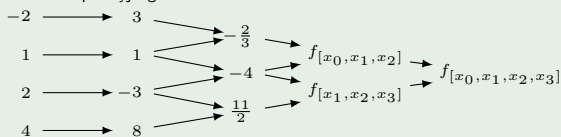
Przykład

Wyznacz wielomian interpolacyjny przechodzący przez punkty: $(-2, 3)$, $(1, 1)$, $(2, -3)$, $(4, 8)$ przy pomocy wzoru interpolacyjnego Newtona.



Przykład

Wyznacz wielomian interpolacyjny przechodzący przez punkty: $(-2, 3)$, $(1, 1)$, $(2, -3)$, $(4, 8)$ przy pomocy wzoru interpolacyjnego Newtona.

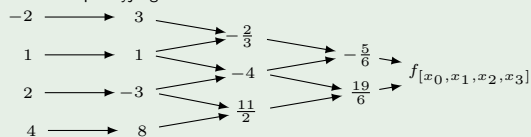


$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-4 - (-\frac{2}{3})}{2 - (-2)} = \frac{-\frac{10}{3}}{4} = -\frac{5}{6}$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{\frac{11}{2} - (-4)}{4 - 1} = \frac{\frac{19}{2}}{5} = \frac{19}{10}$$

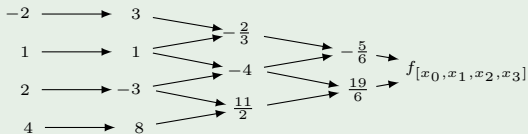
Przykład

Wyznacz wielomian interpolacyjny przechodzący przez punkty: $(-2, 3)$, $(1, 1)$, $(2, -3)$, $(4, 8)$ przy pomocy wzoru interpolacyjnego Newtona.



Przykład

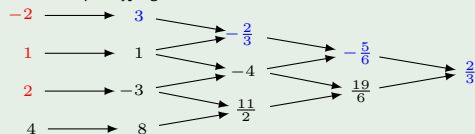
Wyznacz wielomian interpolacyjny przechodzący przez punkty: $(-2, 3)$, $(1, 1)$, $(2, -3)$, $(4, 8)$ przy pomocy wzoru interpolacyjnego Newtona.



$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{\frac{19}{6} - (-\frac{5}{6})}{4 - (-2)} = \frac{\frac{24}{6}}{6} = \frac{2}{3}$$

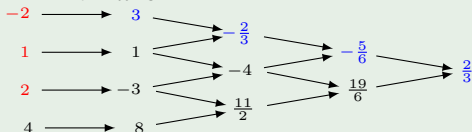
Przykład

Wyznacz wielomian interpolacyjny przechodzący przez punkty: $(-2, 3)$, $(1, 1)$, $(2, -3)$, $(4, 8)$ przy pomocy wzoru interpolacyjnego Newtona.



Przykład

Wyznacz wielomian interpolacyjny przechodzący przez punkty: $(-2, 3)$, $(1, 1)$, $(2, -3)$, $(4, 8)$ przy pomocy wzoru interpolacyjnego Newtona.



$$f(x) = \sum_{i=0}^n c_i (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})$$

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

$$f(x) = 3 + \frac{2}{3}(x + 2) + \frac{5}{6}(x + 2)(x - 1) + \frac{2}{3}(x + 2)(x - 1)(x - 2)$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{25}{6}x + 6$$

Interpolacja odwrotna

Niech dany będzie zbiór liczb (x_i, y_i) , gdzie $y_i = f(x_i)$.

Jeśli

$f(x)$ różnowartościowa "na" $\langle x_0, x_n \rangle$

istnieje funkcja odwrotna $g = f^{-1}$, a zbiór par liczb można interpretować jako tablicę funkcji $g(y)$ zmiennej niezależnej y .

Traktując y_i jako węzły interpolacji, a x_i jako wartości funkcji w tych węzłach ($x_i = g(y_i)$) można utworzyć wielomian interpolujący f-cję odwrotną do $f(x)$.

Zastosowanie: poszukiwanie miejsc zerowych funkcji

Przykład

Rozwiązać równanie $f(x) = 0$, gdzie $f(x)$ jest określona za pomocą

tabeli:

x_i	1	2	3	4
y_i	-4	3	24	65

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73205 \vee x = -1$$

Rozw.

Szukamy $g(y)$ i liczymy $g(0)$, np. korzystając z m. Aitkena

y_i	x_i			
-4	1			
3	2	$W_{0,1}$		
24	3	$W_{0,2}$	$W_{0,1,2}$	
65	4	$W_{0,3}$	$W_{0,1,3}$	$W_{0,1,2,3}$

Przykład

y_i	x_i
-------	-------

-4	1
----	---

3	2	$W_{0,1}$
---	---	-----------

24	3	$W_{0,2}$	$W_{0,1,2}$
----	---	-----------	-------------

65	4	$W_{0,3}$	$W_{0,1,3}$	$W_{0,1,2,3}$
----	---	-----------	-------------	---------------

$$W_{0,1} = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 - y \\ x_1 & y_1 - y \end{vmatrix}}{y_1 - y_0} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 - 0 \\ 2 & 3 - 0 \end{vmatrix}}{3 - -4} = \frac{3+8}{7} = \frac{11}{7} \approx 1.5714$$

$$W_{0,2} = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 - y \\ x_2 & y_2 - y \end{vmatrix}}{y_2 - y_0} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 24 \end{vmatrix}}{24 - -4} = \frac{36}{28} \approx 1.2857$$

$$W_{0,3} = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 - y \\ x_3 & y_3 - y \end{vmatrix}}{y_3 - y_0} = \frac{65+16}{69} = \frac{81}{69} \approx 1.1739$$

Przykład

$$W_{0,1,2} = \frac{\begin{vmatrix} W_{0,1} & y_1 \\ W_{0,2} & y_2 \end{vmatrix}}{y_2 - y_1} \approx 1.6122$$

$$W_{0,1,3} = \frac{\begin{vmatrix} W_{0,1} & y_1 \\ W_{0,3} & y_3 \end{vmatrix}}{y_3 - y_1} \approx 1.5906$$

$$W_{0,1,2,3} = \frac{\begin{vmatrix} W_{0,1,2} & y_2 \\ W_{0,1,3} & y_3 \end{vmatrix}}{y_3 - y_2} \approx 1.6248$$

Liczba działań arytmetycznych potrzebnych do obliczenia pojedynczej wartości wielomianu interpolacyjnego stopnia n :

- postać Lagrange'a:

$$\frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{2}n + 3$$

- postać Newtona:

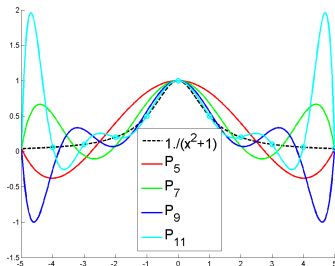
$$\frac{3}{2}n^2 + \frac{9}{2}n$$

- metoda Aitkena:

$$2n^2 + 3n + 1$$

Efekt Runge'go

Równoodległe węzły interpolacji, wielomian wysokiego stopnia →



- oscylacje na krańcach przedziału
- wrażliwość na zaburzenia danych → pogorszenie uwarunkowania zadania interpolacji

Rozwiązanie:

- interpolacja lokalna wielomianami niższego stopnia → funkcje sklejane
- interpolacja w oparciu o węzły nierównoodległe → np. interpolacja Czebyszewa

Wielomiany Czebyszewa

Błąd interpolacji

$$|f(x) - W_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_n(x)|$$

gdzie

$$M_{n+1} = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} |f^{n+1}(x)|$$

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

$f^{(n+1)}$ – niezależne od nas

$\omega_n(x)$ – położenie węzłów - możliwość kontroli

Problem: jak dobrać położenie węzłów

→

Pafnutij Lwowicz Czebyszew (1821-1894)

$$T_i = \begin{cases} \cos(k \arccos(x)) & x \in [-1, 1] \\ \cosh(k \operatorname{arcosh}(x)) & x \geq 1 \\ (-1)^k \cosh(k \operatorname{arcosh}(-x)) & x \leq -1 \end{cases}$$

Definicja rekurencyjna

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$$

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

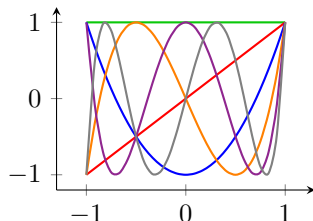
$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

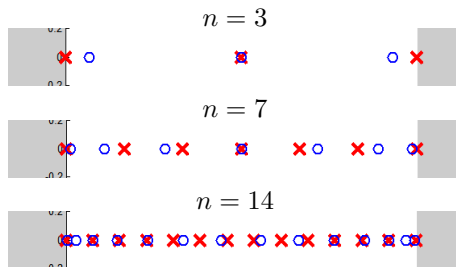
$$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$$

$$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$$

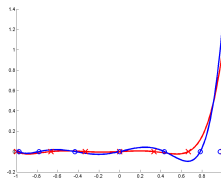
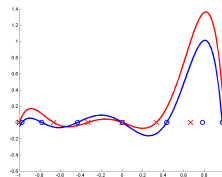
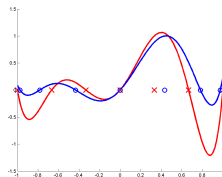
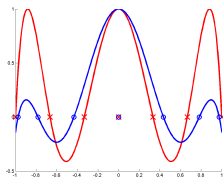
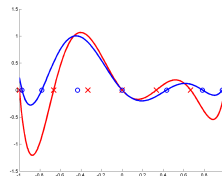
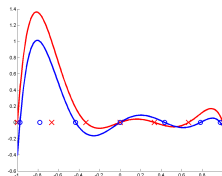
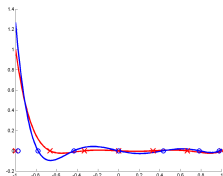


n miejsc zerowych w przedziale $[-1, 1]$

$$x_m = \cos\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right), \quad m = 0, 1, \dots, n-1$$

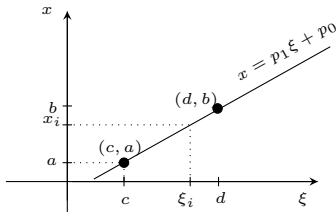


Wielomiany bazowe dla węzłów **równoodległych** i węzłów będących zerami **wielomianów Czebyszewa** dla $n = 7$



Transformacja liniowa przedziału

$$x = p_1 \xi + p_0 \quad (7)$$



$$\begin{cases} a = p_1 c + p_0 \\ b = p_1 d + p_0 \end{cases} \quad (8)$$

$$(b - a)(\xi - c) = (d - c)(x - a) \quad (9)$$

Niech $c = -1, d = 1$

$$p_1 = \frac{2}{b - a} \quad p_0 = -1 - \frac{2a}{b - a}$$

$$\xi = \frac{2}{b - a}x - 1 - \frac{2a}{b - a} \quad (10)$$

$$\xi = \frac{2x - b - a}{b - a} \quad (11)$$

$$x = \frac{1}{2}(b - a)\xi + \frac{1}{2}(b + a) \quad (12)$$

$$T_3(\xi) = 4\xi^3 - 3\xi \quad (13)$$

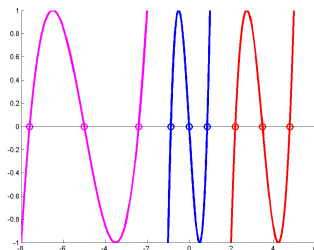
w przedziale unormowanym $\xi \in [-1, 1]$

$$T_3(x) = 4 \left(\frac{2x - (b+a)}{b-a} \right)^3 - 3 \left(\frac{2x - (b+a)}{b-a} \right) \quad (14)$$

dla $x \in [a, b]$.

Niech $a = 2, b = 5$

$$T_3(x) = 4 \left(\frac{2x - 7}{27} \right)^3 - 2x + 7 \quad (15)$$

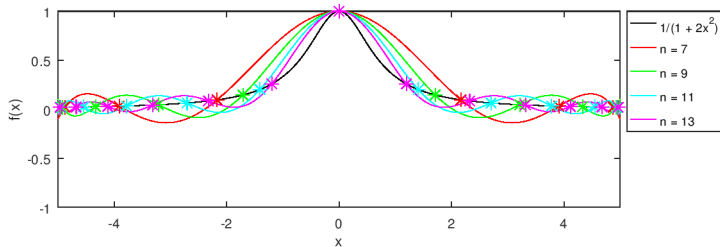


$$x \in [-1, 1]$$

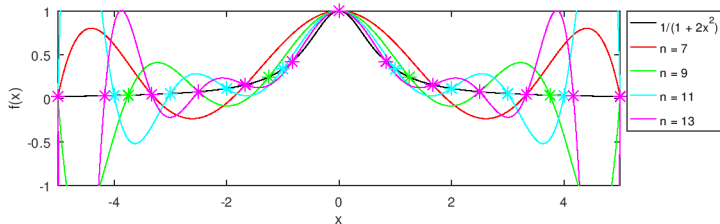
$$x \in [2, 5]$$

$$x \in [-8, -2]$$

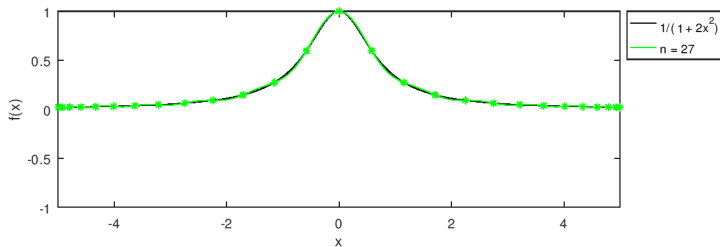
Wezły będące pierwiastkami wielomianu Czebyszewa



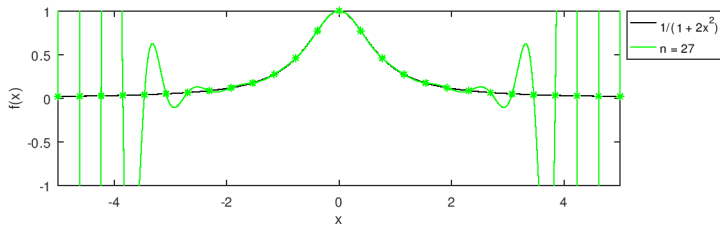
Wezły równoodległe



Wzły będące pierwiastkami wielomianu Czebyszewa



Wzły równoodległe



Interpolacja Hermite'a

Danych jest $n + 1$ punktów z przedziału $< a, b >$:

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$$

Ponadto przypuśćmy, że każdemu z węzłów przyporządkowana jest liczba naturalna $m_j \geq 1$, zwana *krotnością węzła* x_j . Niech $f \in C^{(\max_j m_j)-1}([a, b])$.

Zadanie:

Dla danej funkcji f , oraz danej tablicy węzłów i krotności

$$x_0 x_1 x_2 \dots x_n$$

$$m_0 m_1 m_2 \dots m_n$$

znaleźć wielomian H_M stopnia $\leq M = (\sum_{j=0}^n m_j) - 1$ taki, że

$$M_M^{(s)}(x_j) = f^{(s)}(x_j) \quad j = 0, 1, \dots, n; \quad s = 0, 1, \dots, m_j - 1$$

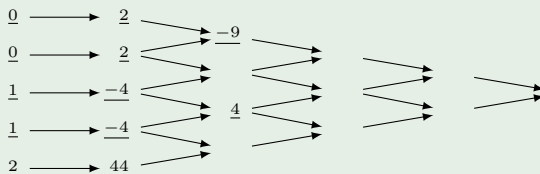
Przykład

Wyznacz wielomian interpolacyjny Hermite'a spełniający warunki:

$$H(0) = 2, H'(0) = -9,$$

$$H(1) = -4, H'(1) = 4$$

$$H(2) = 44$$



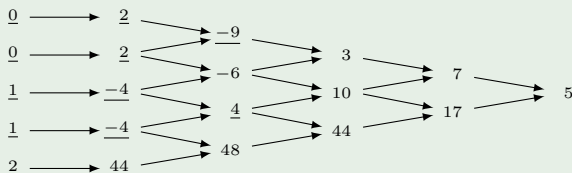
Przykład

Wyznacz wielomian interpolacyjny Hermite'a spełniający warunki:

$$H(0) = 2, H'(0) = -9,$$

$$H(1) = -4, H'(1) = 4$$

$$H(2) = 44$$



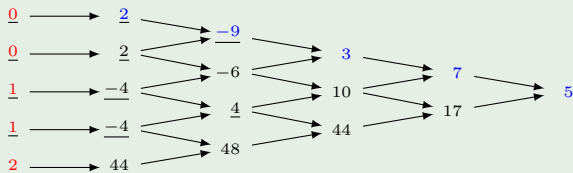
Przykład

Wyznacz wielomian interpolacyjny Hermite'a spełniający warunki:

$$H(0) = 2, H'(0) = -9,$$

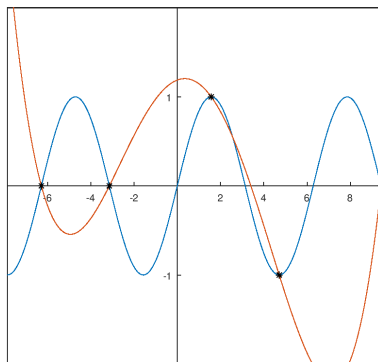
$$H(1) = -4, H'(1) = 4$$

$$H(2) = 44$$

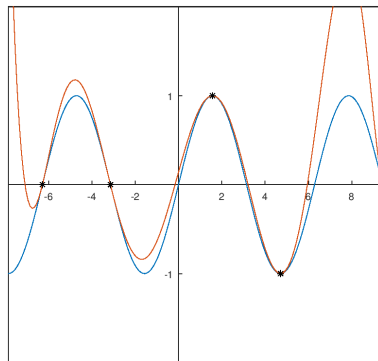


$$H_5(x) = 2 + -9x + 3x^2 + 7(x - 1)x^2 + 5(x - 1)^2x^2$$

Interpolacja funkcji $\sin(x)$ z $n = 5$ węzłów interpolacji

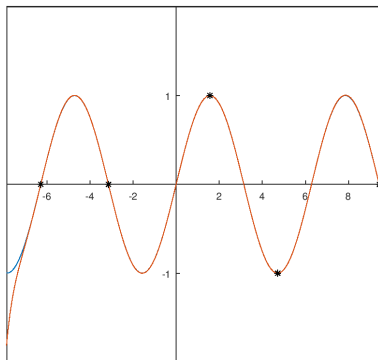


Rysunek 1: Znale same wartości funkcji

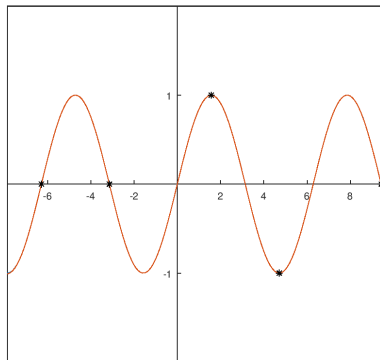


Rysunek 2: Dodatkowo znana pierwsza pochodna

Interpolacja funkcji $\sin(x)$ z $n = 5$ węzłów interpolacji



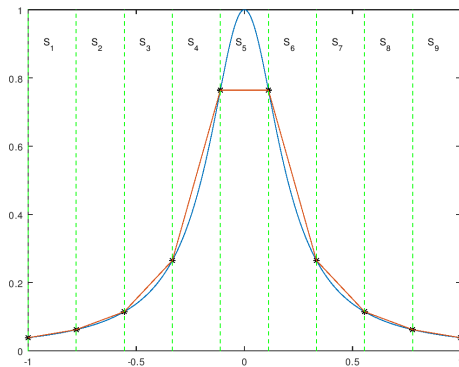
Rysunek 3: Znana wartość oraz pierwszy i drugi stopień pochodnej w węzłach



Rysunek 4: Znana wartość, pierwszy, drugi i trzeci stopień pochodnej w węzłach

Interpolacja funkcjami sklejanymi (ang. spline)

- podział na n przedziałów wyznaczonych przez $n + 1$ kolejnych węzłów.
- w każdym przedziale obowiązuje inny wielomian o wybranym maksymalnym stopniu k , gdzie k to stopień funkcji sklepanej
- dodatkowo wymagane jest aby funkcja sklejana stopnia k miała ciągłe pochodne na całym przedziale $< x_0, x_n >$ do stopnia $k - 1$



Spline pierwszego stopnia (liniowy)

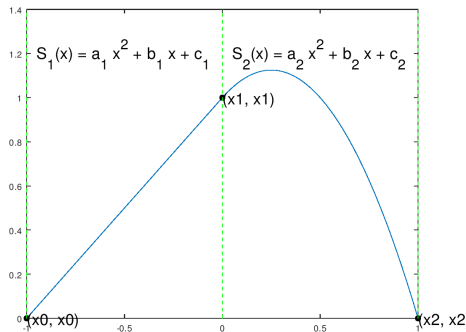
- pomiędzy każdymi węzłami inny wzór liniowy $S_i(x) = a_i x + b_i$
- prosta linia łącząca węzły
- nie ma tu wymagań co do ciągłości pochodnej

Wzór na obliczenie wartości między węzłami:

$$y = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) \quad (16)$$

Spline drugiego stopnia (kwadratowy)

- pomiędzy każdymi węzłami inny wzór kwadratowy
$$S_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$
- punkty łączne są parabolą
- 3 niewiadome (a_i, b_i, c_i) dla każdego przedziału czyli $3n$ niewiadomych
- $2n$ równań wynikających z tego, że każda parabola przechodzi przez 2 węzły
- $n - 1$ równań z równości pochodnych funkcji w węzłach
- przyjęcie $a_1 = 0$ dla możliwości obliczenia wszystkich niewiadomych (pierwsza funkcja sklejana będzie liniowa)



$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = y_0 \quad (17)$$

$$a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + c_1 = y_1 \quad (18)$$

$$a_2 x_1^2 + b_2 x_1 + c_2 = y_1 \quad (19)$$

$$a_2 x_2^2 + b_2 x_2 + c_2 = y_2 \quad (20)$$

$$2a_1 x_1 + b_1 = 2a_2 x_1 + b_2 \quad (21)$$

$$a_1 = 0 \quad (22)$$

Przykład

Wyznacz wzory na częściowe funkcję interpolacji kwadratowymi funkcjami sklejanymi

x	1	3	6	7
y	1	3	2	4

$$S_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1 \quad \text{dla } x_0 < x < x_1$$

$$S_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 \quad \text{dla } x_1 < x < x_2$$

$$S_3(x) = a_3x^2 + b_3x + c_3 \quad \text{dla } x_3 < x < x_4$$

Wszystkie wymagane równania:

$$a_1 + b_1 + c_1 = 1$$

$$9a_1 + 3b_1 + c_1 = 3$$

$$9a_2 + 3b_2 + c_2 = 3$$

$$36a_2 + 6b_2 + c_2 = 2$$

$$36a_3 + 6b_3 + c_3 = 2$$

$$49a_3 + 7b_3 + c_3 = 4$$

$$6a_1 + b_1 = 6a_2 + b_2$$

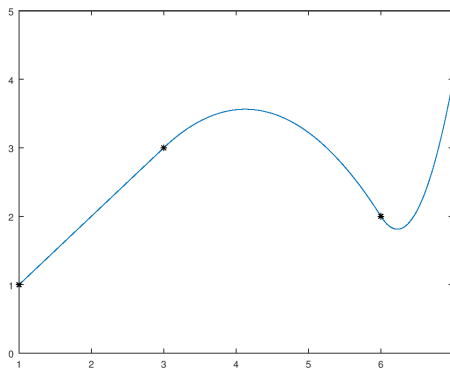
$$12a_2 + b_2 = 12a_3 + b_3$$

$$a_0 = 0 \quad (23)$$

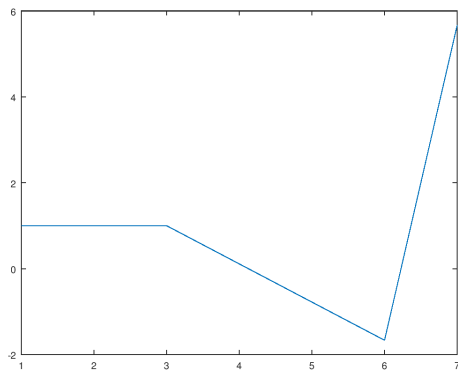
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 36 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49 & 7 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 1 & 0 & -12 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

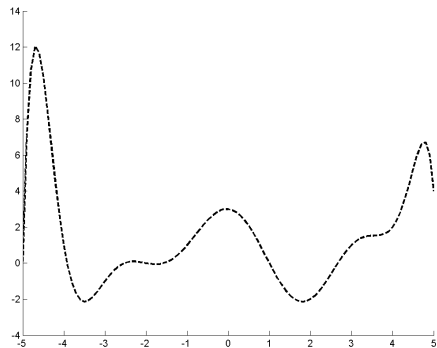
Wyniki po obliczeniu układów równań

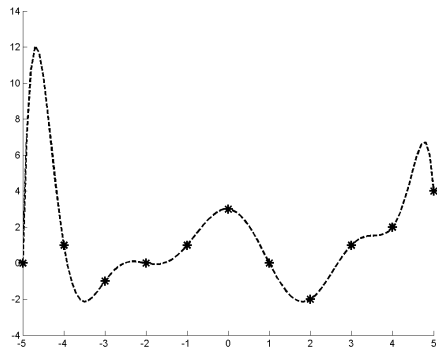
i	a_i	b_i	c_i
1	0	1	0
2	-0.444	3.666	-4
3	3.666	-45.667	144

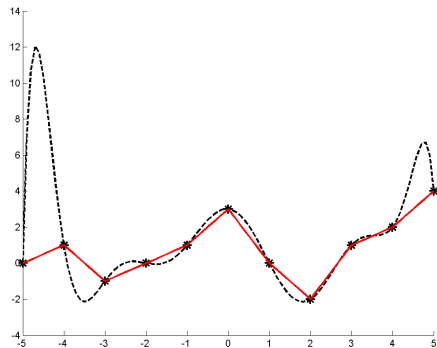


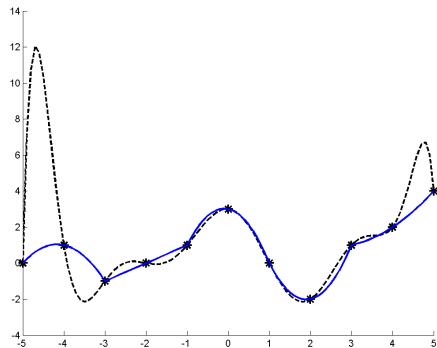
Pochodna otrzymanej kwadratowej funkcji sklejanej

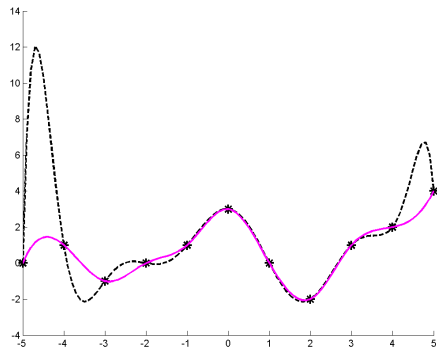












- interpolacja przedziałami
- funkcje sklejjane
- interpolacja wielowymiarowa

Bibliografia:

[0] Rysunek tytułowy: <http://www.geosolutions.com/3d/analyse/interpolation.htm>

Dziękuję za uwagę