

Metody numeryczne

Wykład 4

Układy równań liniowych – normy, uwarunkowanie, zagadnienia własne

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 65 \\ 47 \\ 37 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^* = [60 \ 60 \ 60]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.33 & 0.25 \\ 0.33 & 0.25 & 0.20 \\ 0.25 & 0.20 & 0.17 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} \approx [47 \ 121 \ 6]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.3333 & 0.2500 \\ 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 \\ 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} \approx [59 \ 63 \ 58]^T$$

$$|\mathbf{A}| \approx 10^{-5}$$

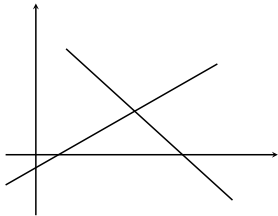
$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 6.00001 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8.00001 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^* = [1 \ 1]^T$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 5.99999 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8.00002 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^* = [10 \ -2]^T$$

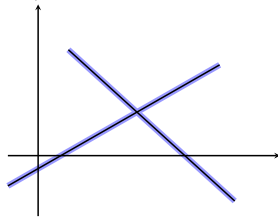
$$|\mathbf{A}| \approx 10^{-5}$$



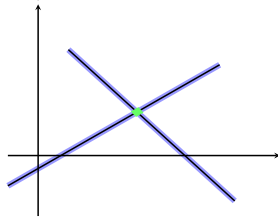
$$y = ax + b$$

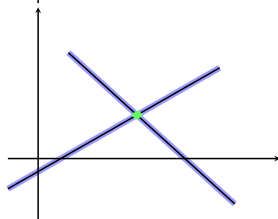
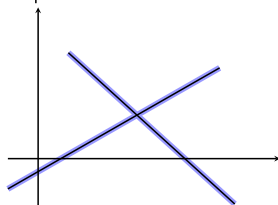
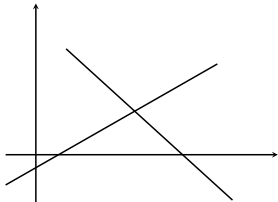
$$y = a_1x + b_1$$

$$y = a_2x + b_2$$



$$\begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$





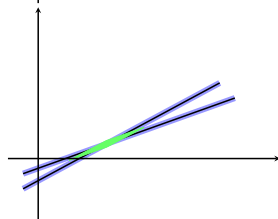
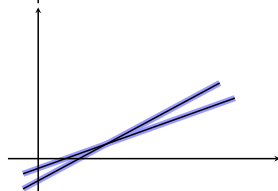
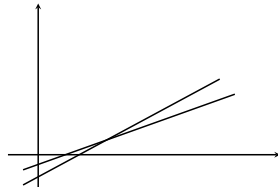
$$y = ax + b$$

$$y = a_1x + b_1$$

$$y = a_2x + b_2$$

$$\begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

w jaki sposób mierzyć
wrażliwość układu na
zaburzenia danych?



Normy wektorów

Definicja

W przestrzeni wektorowej $\mathbb{V}$ norma jest funkcją $\|\cdot\|$ określoną na $\mathbb{V}$, o wartościach rzeczywistych nieujemnych, która ma trzy własności:

$$\|\mathbf{x}\| > 0 \quad \text{dla } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{V}$$

$$\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\| \quad \text{dla } \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{V}$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \text{dla } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$$

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n], \mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]$$

norma wektora = długość, wielkość wektora

- normy p -te

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}$$

- $p = 1$

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$$

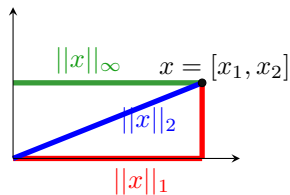
- $p = 2$ (norma euklidesowa)

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

- norma maksymalna (nieskończona)

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}\|_p = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$$



- normy p -te

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}$$

- $p = 1$

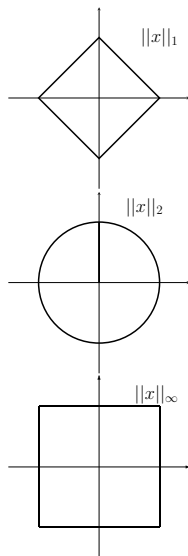
$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$$

- $p = 2$ (norma euklidesowa)

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

- norma maksymalna (nieskończona)

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}\|_p = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$



Kula jednostkowa w $\mathbb{R}^2$

Normy macierzowe

$$||\mathbf{A}|| > 0 \quad \text{dla } \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$$

$$||\lambda \mathbf{A}|| = |\lambda| ||\mathbf{A}|| \quad \text{dla } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$||\mathbf{A} + \mathbf{B}|| \leq ||\mathbf{A}|| + ||\mathbf{B}||$$

Normy indukowane przez normy wektorowe:

$$||\mathbf{A}|| = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{||\mathbf{A}\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||}$$

$\Downarrow$

$$||\mathbf{A}\mathbf{x}|| \leq ||\mathbf{A}|| \cdot ||\mathbf{x}|| - \text{warunek zgodności}$$

$$||\mathbf{AB}|| \leq ||\mathbf{A}|| \cdot ||\mathbf{B}||$$

Normy indukowane przez normy wektorowe

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1} |x_j|$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$$

gdzie ρ – największa wartość własna

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

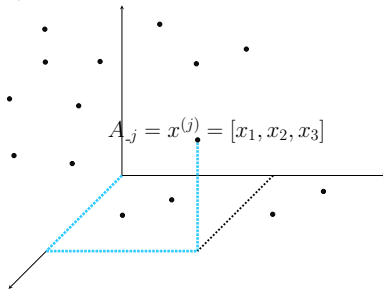
$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$$

Norma Frobeniusza (euklidesowa) macierzy (nieindukowana ale zgodna z $\|\mathbf{x}\|_2$)

$$\|\mathbf{x}\|_E = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{x}$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$



$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 5.99999 \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

$$1.0833$$

$$12.0000$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$$

$$0.8751$$

$$8.9443$$

$$\|\mathbf{x}\|_E = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$0.8761$$

$$8.9443$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$$

$$1.0833$$

$$8$$

Analiza zaburzeń

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = (\mathbf{b} + \delta\mathbf{b})$$

$$\delta\mathbf{b} \neq \mathbf{0}, \delta\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$$

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{A}\delta\mathbf{x} = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{b}$$

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{b}$$

$$1 \quad ||\mathbf{x}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$2 \quad ||\lambda\mathbf{x}|| = |\lambda| ||\mathbf{x}||$$

$$3 \quad ||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$$

$$4 \quad ||\mathbf{A}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$5 \quad ||\lambda\mathbf{A}|| = |\lambda| ||\mathbf{A}||$$

$$6 \quad ||\mathbf{A} + \mathbf{B}|| \leq ||\mathbf{A}|| + ||\mathbf{B}||$$

$$7 \quad ||\mathbf{AB}|| \leq ||\mathbf{A}|| \cdot ||\mathbf{B}||$$

$$8 \quad \text{Warunek zgodności:}$$

$$||\mathbf{Ax}|| \leq ||\mathbf{A}|| \cdot ||\mathbf{x}||$$

Analiza zaburzeń

$$\|\delta_{\mathbf{x}}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\delta_{\mathbf{b}}\| \rightarrow (8)$$

$$\|\delta_{\mathbf{x}}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\delta_{\mathbf{b}}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\delta_{\mathbf{b}}\|$$

$$\|\delta_{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\delta_{\mathbf{b}}\|$$

Zał. $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ – równanie niejednorodne

$$\frac{\|\delta_{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\delta_{\mathbf{b}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

$$\frac{\|\delta_{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|} \frac{\|\delta_{\mathbf{b}}\|}{\|\mathbf{b}\|} \rightarrow (\mathbf{Ax} = \mathbf{b})$$

$$\frac{\|\delta_{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} \frac{\|\delta_{\mathbf{b}}\|}{\|\mathbf{b}\|} \rightarrow (8)$$

$$\frac{\|\delta_{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \frac{\|\delta_{\mathbf{b}}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

$$1 \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$2 \quad \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$$

$$3 \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

$$4 \quad \|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$5 \quad \|\lambda \mathbf{A}\| = |\lambda| \|\mathbf{A}\|$$

$$6 \quad \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$$

$$7 \quad \|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$$

$$8 \quad \text{Warunek zgodności:} \\ \|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|$$

Analiza zaburzeń

$$\frac{\|\delta_{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\| \frac{\|\delta_b\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\|$$

$\text{cond}(\mathbf{A})$ – wskaźnik uwarunkowania macierzy $\mathbf{A}$

$\text{cond}(\mathbf{A}) \gg 1$ – macierz źle uwarunkowana

$\text{cond}(\mathbf{A}) \approx 1$ – macierz dobrze uwarunkowana

1 $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

2 $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$

3 $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

4 $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$

5 $\|\lambda \mathbf{A}\| = |\lambda| \|\mathbf{A}\|$

6 $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$

7 $\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$

8 Warunek zgodności:
 $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|$

Analiza zaburzeń

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{A} + \delta_{\mathbf{A}})(\mathbf{x} + \delta_{\mathbf{x}}) = (\mathbf{b} + \delta_{\mathbf{b}})$$

$$\delta_{\mathbf{b}} = \mathbf{0}, \delta_{\mathbf{A}} \neq \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} + \delta_{\mathbf{A}})(\mathbf{x} + \delta_{\mathbf{x}}) = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{A}\delta_{\mathbf{x}} + \delta_{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \delta_{\mathbf{A}}\delta_{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \quad \rightarrow (\mathbf{Ax} = \mathbf{b})$$

$$\mathbf{A}\delta_{\mathbf{x}} + \delta_{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \delta_{\mathbf{A}}\delta_{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}\delta_{\mathbf{x}} = -\delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{x} + \delta_{\mathbf{x}})$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\delta_{\mathbf{x}} = -\mathbf{A}^{-1}\delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{x} + \delta_{\mathbf{x}})$$

$$1 \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$2 \quad \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$$

$$3 \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

$$4 \quad \|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$5 \quad \|\lambda\mathbf{A}\| = |\lambda|\|\mathbf{A}\|$$

$$6 \quad \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$$

$$7 \quad \|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$$

$$8 \quad \text{Warunek zgodności:} \\ \|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|$$

Analiza zaburzeń

$$\delta_{\mathbf{x}} = -\mathbf{A}^{-1}\delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{x} + \delta_{\mathbf{x}})$$

$$\|\delta_{\mathbf{x}}\| = \|-1 \cdot \mathbf{A}^{-1}\delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{x} + \delta_{\mathbf{x}})\| \rightarrow (2)$$

$$\|\delta_{\mathbf{x}}\| = |-1| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{x} + \delta_{\mathbf{x}})\|$$

$$\|\delta_{\mathbf{x}}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{x} + \delta_{\mathbf{x}})\| \rightarrow (8)$$

$$\|\delta_{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\delta_{\mathbf{A}}\| \cdot \|(\mathbf{x} + \delta_{\mathbf{x}})\|$$

$$\frac{\|\delta_{\mathbf{x}}\|}{\|(x + \delta_x)\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\delta_{\mathbf{A}}\| \rightarrow (7)$$

$$\frac{\|\delta_{\mathbf{x}}\|}{\|(x + \delta_x)\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\delta_{\mathbf{A}}\|$$

$$\frac{\|\delta_{\mathbf{x}}\|}{\|(x + \delta_x)\|} \leq \underbrace{\|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\|}_{\text{cond}(\mathbf{A})} \cdot \frac{\|\delta_{\mathbf{A}}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

(1)

1 $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

2 $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$

3 $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

4 $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$

5 $\|\lambda \mathbf{A}\| = |\lambda| \|\mathbf{A}\|$

6 $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$

7 $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$

8 Warunek zgodności:
 $\|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|$

det vs cond

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{bmatrix}$$

$$\text{cond}(\mathbf{A}) \approx 1.3533 \cdot 10^3$$

$$\det(\mathbf{A}) \approx 2.3148 \cdot 10^{-5}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 5.99999 \end{bmatrix}$$

$$\text{cond}(\mathbf{A}) \approx 4 \cdot 10^6$$

$$\det(\mathbf{A}) \approx -2 \cdot 10^{-5}$$

det vs cond

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{bmatrix}$$

$$\text{cond}(\mathbf{A}) \approx 1.3533 \cdot 10^3$$

$$\det(\mathbf{A}) \approx 2.3148 \cdot 10^{-5}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 5.99999 \end{bmatrix}$$

$$\text{cond}(\mathbf{A}) \approx 4 \cdot 10^6$$

$$\det(\mathbf{A}) \approx -2 \cdot 10^{-5}$$

$$\mathbf{B} = 0.1 * \mathbf{I}_{n \times n}$$

$$\text{cond}(\mathbf{B}) = 1$$

$$\det(\mathbf{B}) = 0.1^n$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 2 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{cond}(\mathbf{B}) = \text{ctg}^2 \frac{\pi}{4n} \rightarrow \text{Alexander Ostrowski}$$

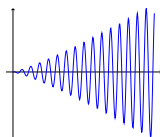
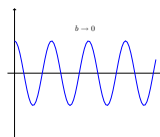
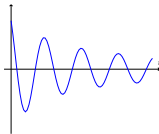
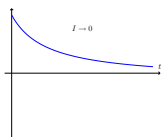
$$\det(\mathbf{B}) = 1$$

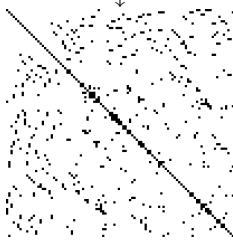
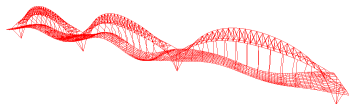
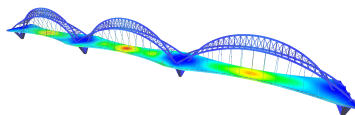
Drgania własne (swobodne)

(Loading Video...)

Movie/eigen.mp4

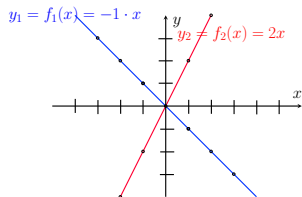
<http://www.youtube.com/watch?v=j-zczJXSxnw>





$$Ax = b$$

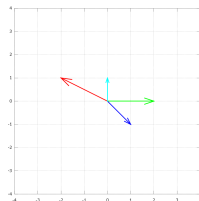
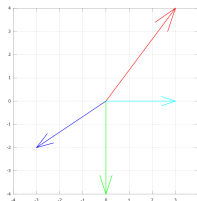
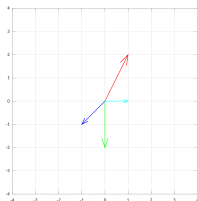
$$y = f(x)$$



$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

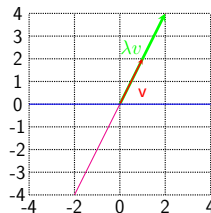
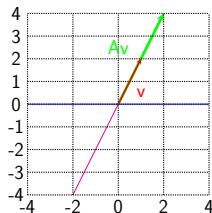
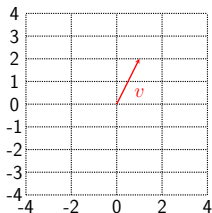
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Wartości własne, wektory własne

- Niech dana będzie macierz A
- Czy istnieje taki wektor v , który po przekształceniu transformacją Av będzie "taki sam" jak przed? $w = Av$, $w = v$

ew. może być przeskalowany $w = \lambda v$



- wektor własny – wektor "odporny" na odwzorowanie, co najwyżej pozwalający się przeskalować/zmienić zwrot
- wartość własna – parametr skalujący wektor własny

Wartości własne, wektory własne

Podstawowe sformułowanie zagadnienia własnego:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

$\mathbf{v}$ – wektor własny

λ – wartość własna

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{I}\mathbf{v}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (-1)^n(\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_n) = 0$$

Wartości własne $\rightarrow$ pierwiastki równania charakterystycznego (zadanie źle uwarunkowane ze złożonością $n!$)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0.5 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1$$

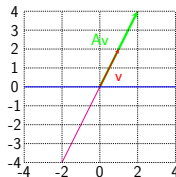
$$\lambda_2 = 2$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 - 1 & 0.5 \\ 0 & 2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 - 2 & 0.5 \\ 0 & 2 - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1 \in \mathbb{R}, v_2 = 0$$

$$v_1 \in \mathbb{R}, v_2 = 2v_1$$



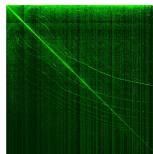
Własności wartości i wektorów własnych

- Macierz $\mathbf{A}$ stopnia n ma co najwyżej n różnych wektorów własnych i odpowiadających wartości własnych.
- Wektory własne wyznaczają tylko kierunki (kierunki niezmiennicze/własne)
- Wartości własne mogą być rzeczywiste lub zespolone.
- Zbiór wartości własnych jest nazywany widmem macierzy.
- Wektory własne dla różnych wartości własnych są liniowo niezależne.
- Macierze hermitowskie mają wartości własne rzeczywiste.
- Szczególny przypadek macierzy hermitowskiej – macierz rzeczywista symetryczna ma wartości własne rzeczywiste i wektory własne ortogonalne dla różnych wartości własnych. Macierz rzeczywista symetryczna dodatnio określona ma dodatnie wartości własne.
- $\det(\mathbf{A}) = \prod \lambda_i$

Zastosowanie

- Analiza odporności struktur mechanicznych na wymuszenia zewnętrzne
- selekcja i ekstrakcja najistotniejszych (najbardziej różnicujących) cech w klasyfikacji, np. rozpoznawaniu kształtów – liter, twarzy, sygnałów, zmian zwyrodnieniowych na zdjęciach rentgenowskich, automatycznym rozpoznawaniu celu na polu walki

- algorytm PageRank
rankingowania stron WWW
w wyszukiwarce Google →
wartości własne macierzy
rzędu $n \approx 10^{10}$ wyznaczone
raz w miesiącu



Struktura macierzy PageRank dla sieci Uniwersytetu Cambridge, $n = 212710$

Źródło: http://en.wikipedia.org/wiki/Google_matrix

- $\text{cond}(\mathbf{A}) = \lambda_{\max} / \lambda_{\min}$
- statystyka, telekomunikacja, teoria sterowania
- obliczanie miejsc zerowych wielomianów (Octave → funkcja *roots*)

Analiza spektralna (widmowa) macierzy

- Wyznaczenie dominującej wartości własnej (to znaczy: największej co do modułu) ($\max. |\lambda|$) i odpowiadającego jej wektora własnego
- Wyznaczenie najmniejszej co do modułu wartości własnej i wektorów jej odpowiadających
- Wyznaczenie wartości własnej najbliższej zadanej liczbie
- Wyznaczenie wszystkich wartości własnych
- Wyznaczenie wszystkich wartości i wektorów własnych (tzw. pełne zagadnienie własne)

Metody poszukiwania wartości własnych

- metoda potęgowa
- metoda Jacobiego
- metoda dekompozycji QR
- metoda dekompozycji SVD

Metoda potęgowa

→ największa w.w. (odwrotna met. potęgowa → najmniejsza w.w.,
odpowiednie przekształcenie macierzy → każda w.w.)

Zał.:

- Dla danej macierzy elementów rzeczywistych $\mathbf{A}_{n \times n}$:
 $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$; (λ_1 – dominująca wartość własna macierzy $\mathbf{A}$)
- Niech wektory własne $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ tworzą bazę wektorów ortogonalnych
 (jest tak dla $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$)

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k$$

Niech:

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$$

A więc

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A} \left(\sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i \right) = \sum_i \alpha_i \mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sum_i \alpha_i \lambda_i \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{A}^k \mathbf{x} = \sum_i \alpha_i \lambda_i^k \mathbf{v}_i = \lambda_1^k \left(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_1 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{v}_n \right)$$

$$k \rightarrow \infty \Rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{v}_1$$

```
1 A = [4    0.5 ;  
2      0.5 1    ] ;  
3 x=[1  
4    1];  
5  
6 for k=1:100  
7     y = A*x;  
8     ymax = max(abs(y));  
9     x= y/ymax;  
10    l= ymax;  
11 end
```

```
x =  
    1.0000  
    0.1623
```

```
l =  
    4.0811
```

```
1 A = [4    0.5 ;  
2      0.5 1    ] ;  
3  
4 [V,D] = eig(A) ;
```

```
V =  
    0.1602    -0.9871  
   -0.9871    -0.1602
```

```
D =  
    0.9189         0  
         0    4.0811
```

Metoda przekształceń przez podobieństwo (Jacobiego)

- dla macierzy symetrycznych
- wyznaczenie wszystkich wartości własnych i wektorów własnych
- dla niewielkich macierzy (max. stopień 10)
- wartości własne i wektory własne otrzymywane w wyniku ciągu ortogonalnych transformacji macierzy **A** (kolejne zerowanie par max. co do modułu elementów macierzy **A**).

Twierdzenie

*Macierz **A** jest podobna (ortogonalnie) do macierzy **B** jeśli istnieje taka macierz **R**, że:*

$$\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} = \mathbf{B}$$

- pojedyncza transformacja

$$\mathbf{R}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{R}_k = \mathbf{A}_{k+1}$$

gdzie $\mathbf{R}_k$ - macierz rotacji o kąt φ ($c = \cos \varphi, s = \sin \varphi$)

($\rightarrow$ Wykład o wartościach własnych - macierz jako transformator, Wykład o URL - macierze permutacji)
nie zmienia układu wartości własnych.

$$\mathbf{R}_k = \begin{matrix} & & & i & & j & & \\ i & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & \dots & & c & & & s & \dots & \dots \\ & & & & 1 & & & & \\ j & \dots & \dots & -s & \dots & & c & & 1 & \dots & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} & & \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} s &= tc \\ c &= (1 + t^2)^{-\frac{1}{2}} \\ t &= \frac{\text{sign}(\zeta)}{|\zeta| + \sqrt{1 + \zeta^2}} \\ \zeta &= \frac{a_{jj} - a_{ii}}{2a_{ij}} \end{aligned}$$

- $\mathbf{R}_n^T \dots \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1^T \mathbf{A} \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \dots \mathbf{R}_n = \mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
- $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \dots \mathbf{R}_n$ - macierz wektorów własnych


```
1 A = [10 -3 1
2      -3 9 4
3      1 4 7] ;
4 n_max = 10 ; R = eye(size(A)) ;
5
6 for kk = 1:n_max
7     AA = abs(~eye(size(A)) .* A) ;
8     ind = find(AA==(max(max(AA)))) ;
9     [ii,jj] = ind2sub(size(AA),ind) ;
10    ii = ii(1) ; jj = jj(1) ;
11
12    xi = (A(jj,jj) - A(ii,ii)) / (2 * A(ii,jj)) ;
13    t = sign(xi)/( abs(xi) + sqrt(1+xi^2) ) ;
14    c = 1/sqrt(1+t^2) ;
15    s = t * c ;
16
17    R_k = eye(size(A)) ;
18    R_k(ii,ii) = c ; R_k(jj,jj) = c ; R_k(ii,jj) = s ; R_k(jj,ii) = -s ;
19
20    R = R*R_k ;
21    A = R_k' * A * R_k ;
22 end
```

A =

10	-3	1
-3	9	4
1	4	7

A =

10.0000	-1.7492	2.6344
-1.7492	12.1231	-0.0000
2.6344	0	3.8769

A =

10.9774	-1.6400	0.0000
-1.6400	12.1231	0.6085
-0.0000	0.6085	2.8995

A =

9.8131	0	0.3522
0.0000	13.2874	0.4961
0.3522	0.4961	2.8995

A =

9.8131	0.0168	0.3518
0.0168	13.3110	-0.0000
0.3518	0.0000	2.8758

A =

9.8309	0.0167	0.0000
0.0167	13.3110	-0.0008
0.0000	-0.0008	2.8580

A =

9.8309	-0.0000	0.0000
-0.0000	13.3111	-0.0008
0.0000	-0.0008	2.8580

D =

2.8580	0	0
0	9.8309	0
0	0	13.3111

R =

1	0	0
0	1	0
0	0	1

R =

1.0000	0	0
0	0.7882	-0.6154
0	0.6154	0.7882

R =

0.9376	0	-0.3479
-0.2141	0.7882	-0.5770
0.2742	0.6154	0.7390

R =

0.7645	-0.5427	-0.3479
0.2817	0.7666	-0.5770
0.5798	0.3431	0.7390

R =

0.7645	-0.5587	-0.3216
0.2817	0.7383	-0.6128
0.5798	0.3779	0.7218

R =

0.7473	-0.5587	-0.3598
0.2504	0.7383	-0.6263
0.6156	0.3779	0.6916

R =

0.7499	-0.5551	-0.3598
0.2469	0.7395	-0.6263
0.6137	0.3808	0.6916

V =

-0.3599	0.7499	-0.5551
-0.6262	0.2469	0.7395
0.6916	0.6137	0.3808

Dziękuję za uwagę