

Metody numeryczne

Wykład 3

Układy równań liniowych

Ogólne sformułowanie zadania

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3)$$

$\mathbf{A}$ – macierz współczynników układu

$\mathbf{x}$ – szukany wektor rozwiązań

$\mathbf{b}$ – wektor wyrazów wolnych

Ogólne sformułowanie zadania

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$\frac{3}{4}$ czasu obliczeniowego superkomputerów

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

Ogólne sformułowanie zadania

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$\frac{3}{4}$ czasu obliczeniowego superkomputerów

$$\cancel{\mathbf{x}} \neq \cancel{\mathbf{A}}^{-1} \cancel{\mathbf{b}}$$

Pojęcia wstępne

- *Wyznacznik* – odwzorowanie, które danej macierzy $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{nn}$ przyporządkowuje dokładnie jedną liczbę rzeczywistą $|A| = \det(\mathbf{A})$.

$$|A| = \begin{cases} a_{11} & \text{dla } n = 1 \\ \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{\setminus \{ij\}}| & \text{dla } n > 1 \end{cases}$$

gdzie $|A_{\setminus \{ij\}}|$ to wyznacznik z podmacierzy $\mathbf{A}$ powstałej po skreśleniu i -tego wiersza i j -tej kolumny. (rozwinięcie Laplace'a $\rightarrow$ reguła Sarrusa dla $n = 3$)

- *Macierz osobliwa* – macierz kwadratowa, dla której $|A| = 0$
- *Macierz nieosobliwa* – macierz kwadratowa, dla której $|A| \neq 0$
- *Macierz jednostkowa (identycznościowa)* - macierz, której współczynniki określone są wzorem

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Pojęcia wstępne

- *Macierz odwrotna* – macierz kwadratowa $\mathbf{B}$ jest odwrotna do $\mathbf{A}$ ($\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$) o ile:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I} \implies \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Jeżeli nie istnieje taka macierz $\mathbf{B}$ to macierz $\mathbf{A}$ jest nieodwracalna (osobliwa).

- *Macierz transponowana* (przestawiona) macierzy $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ – macierz $\mathbf{A}^T$, która powstaje z danej poprzez zamianę jej wierszy na kolumny i kolumn na wiersze.

$$\mathbf{A}^T = [a_{ji}]$$

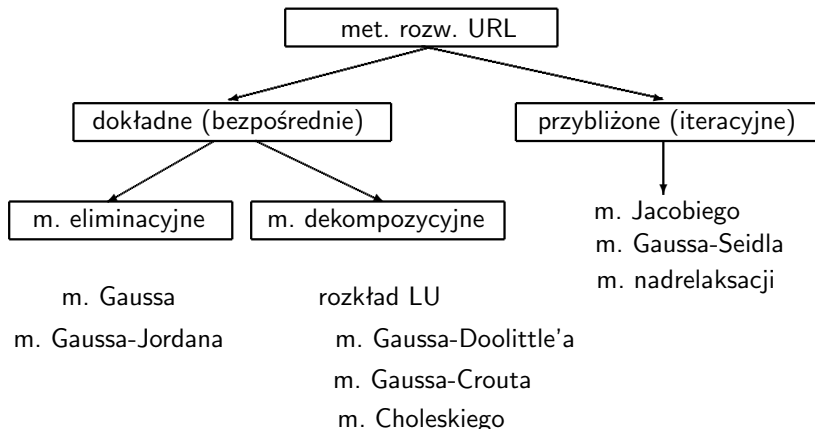
- *Macierz symetryczna* – macierz kwadratowa, której wyrazy położone symetrycznie względem przekątnej głównej są równe, tj.

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Inaczej:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$$

Klasyfikacja numerycznych metod rozwiązywania URL



~~metoda wyznacznikowa (wzory Cramera)~~
~~odwracanie A~~

Metody dokładne

dokładne rozwiązanie po skończonej liczbie przekształceń układu wyjściowego

- skończona liczba operacji
- błąd wynika jedynie z obcinania lub zaokrąglania liczb w trakcie obliczeń
- stosowane dla „stosunkowo małych” URL o macierzach pełnych (duża efektywność)
- duże obciążenie pamięci

Przykład

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Wzory Cramera

$$\det(\mathbf{A}) \neq 0 \Rightarrow x_i = \frac{\det \mathbf{A}_{x_i}}{\det \mathbf{A}}$$

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 6 - (3 + 2 + 0) = 4 - 5 = -1$$

$$\det(\mathbf{A}_{x_1}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 6 - (-6 - 2) = -9 + 8 = -1$$

$$\det(\mathbf{A}_{x_2}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 6 - (3 + 3) = 4 - 6 = -2$$

$$\det(\mathbf{A}_{x_3}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 2 + 6 - (3 - 4 + 4) = 1$$

$$x_1 = \frac{-1}{-1} = 1 \quad x_2 = \frac{-2}{-1} = 2 \quad x_3 = \frac{1}{-1} = -1 \implies x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Odwracanie macierzy A

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}^D}{\det(\mathbf{A})}, \text{ gdzie } \mathbf{A}^D = (\mathbf{A}^{dop})^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{ij}^{dop} = (-1)^{i+j} |A_{\setminus \{ij\}}|$$

$$A_{11}^{dop} = (-1)^{1+1} \cdot (-1 - 0) = -1$$

$$A_{12}^{dop} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1$$

$$A_{13}^{dop} = (-1)^{1+3} \cdot (2 - 1) = 1$$

$$A_{21}^{dop} = (-1)^{2+1} \cdot (2 - 6) = (-1) \cdot (-4) = 4$$

$\vdots$

$$\mathbf{A}^{dop} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^D = (\mathbf{A}^{dop})^T = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Rozwiązywanie URL o szczególnych macierzach

$$\mathbf{L}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} l_{11}x_1 & & & & & & & & & = b_1 & / : l_{11} \\ l_{21}x_1 & +l_{22}x_2 & & & & & & & & = b_2 \\ l_{31}x_1 & +l_{32}x_2 & +l_{33}x_3 & & & & & & & = b_3 \\ l_{41}x_1 & +l_{42}x_2 & +l_{43}x_3 & +l_{44}x_4 & & & & & & = b_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \\ l_{n1}x_1 & +l_{n2}x_2 & +l_{n3}x_3 & +l_{n4}x_4 & \dots & l_{nn}x_n & & & & = b_n \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & & & & & & & = \frac{b_1}{l_{11}} \\ & l_{22}x_2 & & & & & & & & = b_2 - l_{21}x_1 & / : l_{22} \\ & l_{32}x_2 & +l_{33}x_3 & & & & & & & = b_3 - l_{31}x_1 \\ & l_{42}x_2 & +l_{43}x_3 & +l_{44}x_4 & & & & & & = b_4 - l_{41}x_1 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \\ & l_{n2}x_2 & +l_{n3}x_3 & +l_{n4}x_4 & \dots & l_{nn}x_n & & & & = b_n - l_{n1}x_1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & & & & & & & = \frac{b_1}{l_{11}} \\ & x_2 & & & & & & & & = \frac{b_2 - l_{21}x_1}{l_{22}} \\ & & l_{33}x_3 & & & & & & & = b_3 - l_{31}x_1 - l_{32}x_2 \\ & & l_{43}x_3 & +l_{44}x_4 & & & & & & = b_4 - l_{41}x_1 - l_{42}x_2 \\ & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \\ & & l_{n3}x_3 & +l_{n4}x_4 & \dots & l_{nn}x_n & & & & = b_n - l_{n1}x_1 - l_{n2}x_2 \end{array} \right.$$

Rozwiązywanie URL o szczególnych macierzach

Macierz trójkątna dolna (L-ower)

$$a_{ij} = 0 \text{ dla } i < j$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & \dots & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & l_{n4} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{L}$ nieosobliwa $\implies l_{ii} \neq 0$,

$k = 1, \dots, n$.

Wyznaczamy x_1 z pierwszego

równania $x_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$

Kolejne x_i dla $i = 2, \dots, n$

wyznaczają się ze wzoru:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j}{l_{ii}}$$

Podstawianie w przód

Rozwiązywanie URL o szczególnych macierzach

Macierz trójkątna górna (U-pper)

$$a_{ij} = 0 \text{ dla } i > j$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} & \dots & u_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} & \dots & u_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

U nieosobliwa $\implies u_{ii} \neq 0$,

$i = 1, \dots, n$.

Wyznaczamy x_n z ostatniego

równania $x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}$

Kolejne x_i dla $i = n - 1, \dots, 1$

wyznaczają się ze wzoru:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j}{u_{ii}}$$

Podstawianie wstecz

Rozwiązywanie URL o szczególnych macierzach

Macierz trójkątna górna (U-pper)

$$a_{ij} = 0 \text{ dla } i > j$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} & \dots & u_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} & \dots & u_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{U}$ nieosobliwa $\implies u_{ii} \neq 0$,
 $i = 1, \dots, n$.

Wyznaczamy x_n z ostatniego
 równania $x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}$

Kolejne x_i dla $i = n-1, \dots, 1$
 wyznacza się ze wzoru:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j}{u_{ii}}$$

Podstawianie wstecz

Bardzo prymitywna wersja
 algorytmu redukcji wstecznej

Dane: $\mathbf{U}$, $\mathbf{b}$, N

Wyniki: $\mathbf{x}$

```

 $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{0}$ ;
for  $i \leftarrow N$  to 1 do
   $S \leftarrow 0$ 
  for  $j \leftarrow i+1$  to  $N$  do
     $S \leftarrow S + \mathbf{U}(i,j) \cdot x(j)$ ;
  end for
   $x(i) \leftarrow \frac{\mathbf{b}(i) - S}{\mathbf{U}(i,i)}$ ;
end for
  
```

Rozwiązywanie URL o szczególnych macierzach

$$\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} x_1 & & & & & & & \\ & x_2 & & & & & & \\ & & x_3 & & & & & \\ & & & x_4 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & x_n & & \end{array} \right. \begin{array}{l} = b_1 \\ = b_2 \\ = b_3 \\ = b_4 \\ \vdots \\ = b_n \end{array}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Definicja

Dwa układy n równań z n niewiadomymi

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad \mathbf{Cx} = \mathbf{d}$$

nazywamy równoważnymi jeśli mają identyczne rozwiązania.

Twierdzenie

Jeśli układ równań wynika z innego układu przez ciąg skończonych operacji elementarnych, to te dwa układy są równoważne.

Operacje elementarne nie zmieniające rozwiązania URL:

- przestawienie dwóch równań w układzie $w_i \leftrightarrow w_j$
- pomnożenie obu stron równania przez liczbę $\neq 0$: $w_i := \lambda w_i$
- dodanie stronami do równania wielokrotności innego równania:
 $w_i := w_i + \lambda w_j$

Metoda eliminacji Gaussa

Sprowadzenie układu do postaci trójkątnej (eliminacja zmiennych)

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \cdots & a_{2n}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1}^{(0)} \\ a_{2,n+1}^{(0)} \\ \vdots \\ a_{n,n+1}^{(0)} \end{bmatrix}$$

Eliminacja zmiennej x_1 z równań od 2-go do n -tego.

Jeśli $a_{11}^{(0)} \neq 0$ można odjąć pierwsze równanie pomnożone przez $a_{i1}^{(0)}/a_{11}^{(0)}$ od pozostałych równań ($i = 2, 3, \dots, n$).

$$w_i^{(1)} = w_i^{(0)} - \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \cdot w_1^{(0)}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1}^{(0)} \\ a_{2,n+1}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{n,n+1}^{(1)} \end{bmatrix}$$

Eliminacja zmiennej x_2 z równań od 3-go do n -tego.

$$w_i^{(2)} = w_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot w_2^{(1)}, \quad i = 3, \dots, n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1}^{(0)} \\ a_{2,n+1}^{(1)} \\ a_{3,n+1}^{(2)} \\ \vdots \\ a_{n,n+1}^{(2)} \end{bmatrix}$$

itd. ... aż do

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(0)} & a_{1n}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2,n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1}^{(n-2)} & a_{n-1,n}^{(n-2)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1}^{(0)} \\ a_{2,n+1}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{n-1,n+1}^{(n-2)} \\ a_{n,n+1}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1$$

$$j = k+1, \dots, n+1$$

$$i = k+1, \dots, n$$

Baaardzo prymitywna wersja algorytmu elim. Gaussa ($\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{Ur}$)

Dane: A, b, N

Wyniki: Ur

$Ur \leftarrow [Ab];$

for $k \leftarrow 1$ to $N-1$ **do**

if $Ur(k, k) = 0$ **then**

return error;

end if

for $j \leftarrow k+1$ to $N+1$ **do**

for $i \leftarrow k+1$ to N **do**

$Ur(i, j) =$

$Ur(i, j) - \frac{Ur(i, k)}{Ur(k, k)} \cdot Ur(k, j);$

end for

end for

end for

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & a_{1,n+1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & a_{3,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & a_{n,n+1}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

m. rozszerzona

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} I. \quad w_2 &= w_2 - \frac{1}{2} \cdot w_1 \\ w_3 &= w_3 + \frac{1}{2} \cdot w_1 \end{aligned}$$

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 3 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{array} \right]$$

$$II. \quad w_3 = w_3 + \frac{3}{2} \cdot w_2$$

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right]$$

czyli:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4} \cdot x_3 = -\frac{1}{4} \Rightarrow x_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 3 \cdot (-1) \\ -\frac{5}{2} - (-\frac{3}{2}) \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$-2 \cdot x_2 = -4 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$[2] \cdot [x_1] = [6 - 2 \cdot 2] = 2$$

$$2 \cdot x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right. \quad / : a_{11}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} / \cdot -a_{21}w_1^{(1)} \\ / \cdot -a_{31}w_1^{(1)} \\ \vdots \\ / \cdot -a_{n1}w_1^{(1)} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)} \\ \vdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{array} \right. \quad / : a_{22}^{(1)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)} \\ \quad x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)} \\ \quad a_{32}^{(1)} x_2 + a_{33}^{(1)} x_3 + \dots + a_{3n}^{(1)} x_n = b_3^{(1)} \\ \quad \vdots \\ \quad a_{n2}^{(1)} x_2 + a_{n3}^{(1)} x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)} x_n = b_n^{(1)} \end{array} \right. \begin{array}{l} / \cdot -a_{12} w_2^{(2)} \\ \\ / \cdot -a_{32} w_2^{(2)} \\ \\ / \cdot -a_{n2} w_2^{(2)} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \quad \quad \quad + a_{13}^{(2)} x_3 + \dots + a_{1n}^{(2)} x_n = b_1^{(2)} \\ \quad x_2 \quad \quad + a_{23}^{(2)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)} \\ \quad \quad a_{33}^{(2)} x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)} x_n = b_3^{(2)} \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad a_{n3}^{(2)} x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)} x_n = b_n^{(2)} \end{array} \right. / : a_{33}^{(2)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \quad \quad \quad + a_{13}^{(2)} x_3 + \dots + a_{1n}^{(2)} x_n = b_1^{(2)} \\ \quad x_2 \quad \quad + a_{23}^{(2)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)} \\ \quad \quad \quad + x_3 \quad \quad + \dots + a_{3n}^{(3)} x_n = b_3^{(3)} \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad + a_{n3}^{(2)} x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)} x_n = b_n^{(2)} \end{array} \right. \begin{array}{l} / \cdot -a_{13} w_3^{(3)} \\ / \cdot -a_{23} w_3^{(3)} \\ \\ \\ / \cdot -a_{n3} w_3^{(3)} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & & & + & \dots & + & a_{1n}^{(3)} x_n = b_1^{(3)} \\ & x_2 & & + & \dots & + & a_{2n}^{(3)} x_n = b_2^{(3)} \\ & & x_3 & + & \dots & + & a_{3n}^{(3)} x_n = b_3^{(3)} \\ & & & & & & \vdots \\ & & & + & \dots & + & a_{nn}^{(3)} x_n = b_n^{(3)} \end{array} \right.$$

itd. až do

$$\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(n)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ccc|c|ccc} 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\text{I. } w_1 = \frac{1}{2} \cdot w_1 \quad \Rightarrow \text{II. } w_2 = w_2 - w_1, w_3 = w_3 + w_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{III. } w_2 = -\frac{1}{2} \cdot w_2 \quad \Rightarrow \text{IV. } w_1 = w_1 - w_2, w_3 = w_3 - 3 \cdot w_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{V. } w_3 = 4 \cdot w_3 \quad \Rightarrow \text{VI. } w_1 = w_1 - \frac{3}{4} \cdot w_3, w_2 = w_2 - \frac{3}{4} \cdot w_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{4} & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Rozkład LU

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (4)$$

Rozkład LU

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (4)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \quad (5)$$

Rozkład LU

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (4)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \quad (5)$$

$$A = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Rozkład LU

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (4)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \quad (5)$$

$$A = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} \underbrace{\mathbf{Ux}}_{\mathbf{Ux=y}} = \mathbf{b} \quad (6)$$

Rozkład LU

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (4)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \quad (5)$$

$$A = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} \underbrace{\mathbf{Ux}}_{\mathbf{Ux=y}} = \mathbf{b} \quad (6)$$

$$\mathbf{A}_{n \times n},$$

Rozkład LU

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (4)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \quad (5)$$

$$A = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} \underbrace{\mathbf{Ux}}_{\mathbf{Ux=y}} = \mathbf{b} \quad (6)$$

$$\mathbf{A}_{n \times n}, \quad \mathbf{x}_{n \times 1},$$

Rozkład LU

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (4)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \quad (5)$$

$$A = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} \underbrace{\mathbf{Ux}}_{\mathbf{Ux=y}} = \mathbf{b} \quad (6)$$

$$\mathbf{A}_{n \times n}, \quad \mathbf{x}_{n \times 1}, \quad \mathbf{b}_{n \times 1},$$

Rozkład LU

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (4)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \quad (5)$$

$$A = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} \underbrace{\mathbf{Ux}}_{\mathbf{Ux=y}} = \mathbf{b} \quad (6)$$

$$\mathbf{A}_{n \times n}, \quad \mathbf{x}_{n \times 1}, \quad \mathbf{b}_{n \times 1},$$

$$\mathbf{U}_{n \times n} \cdot \mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{y}_{n \times 1},$$

Rozkład LU

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (4)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \quad (5)$$

$$A = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} \underbrace{\mathbf{Ux}}_{\mathbf{Ux=y}} = \mathbf{b} \quad (6)$$

$$\mathbf{A}_{n \times n}, \quad \mathbf{x}_{n \times 1}, \quad \mathbf{b}_{n \times 1},$$

$$\mathbf{U}_{n \times n} \cdot \mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{y}_{n \times 1},$$

$$\mathbf{L}_{n \times n} \cdot \mathbf{y}_{n \times 1} = \mathbf{b}_{n \times 1},$$

Rozkład LU

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (4)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \quad (5)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} \underbrace{\mathbf{Ux}}_{\mathbf{Ux=y}} = \mathbf{b} \quad (6)$$

$$\mathbf{A}_{n \times n}, \quad \mathbf{x}_{n \times 1}, \quad \mathbf{b}_{n \times 1},$$

$$\mathbf{U}_{n \times n} \cdot \mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{y}_{n \times 1},$$

$$\mathbf{L}_{n \times n} \cdot \mathbf{y}_{n \times 1} = \mathbf{b}_{n \times 1},$$

$$\begin{cases} \mathbf{Ly} = \mathbf{b} & \implies \mathbf{y} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{b} & \text{podstawianie w przód} \\ \mathbf{Ux} = \mathbf{y} & \implies \mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{y} & \text{podstawianie wstecz} \end{cases} \quad (7)$$

Definicja

Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą kwadratową stopnia n . Wiodący minor główny to wyznacznik macierzy kwadratowej powstałej z danej macierzy $\mathbf{A}$ przez skreślenie z niej ostatnich k ($0 < k \leq n - 1$) wierszy i kolumn.

Przykład

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$W_1 = |a_{11}|, \quad W_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots \quad W_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

Twierdzenie

Jeżeli $\mathbf{A}$ jest macierzą kwadratową stopnia n , której wszystkie wiodące minory główne są różne od 0, to istnieją macierze trójkątna dolna $\mathbf{L}$ i trójkątna górna $\mathbf{U}$, obie stopnia n , takie że

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

Jednoznaczność rozkładu LU:

- $\forall_{k=1,2,\dots,n} \quad l_{kk} = 1 \rightarrow$ m. Gaussa-Doolittle'a
- $\forall_{k=1,2,\dots,n} \quad u_{kk} = 1 \rightarrow$ m. Gaussa-Crouta

Metoda Gaussa-Doolittle'a

Dla $i \in 1, 2, \dots, n$

Dla $j \in i, i+1, \dots, n$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}$$

Dla $j \in i+1, \dots, n$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \cdot (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot u_{ki})$$

Kolejność obliczania:

$$\begin{array}{ccccccc} u_{11}, & u_{12}, & u_{13}, & \dots, & u_{1n} \\ & l_{21}, & l_{31}, & \dots, & l_{n1} \\ & u_{22}, & u_{23}, & \dots, & u_{2n} \\ & & l_{32}, & \dots, & l_{n2} \end{array}$$

itd.

Dane: $n, (a_{ij})$

Wyniki: l_{ij}, u_{ij}

for $k \leftarrow 1$ **to** n **do**

$l_{kk} \leftarrow 1$;

for $j \leftarrow k$ **to** n **do**

$u_{kj} \rightarrow a_{kj} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks} u_{sj}$

end for

for $i \rightarrow k+1$ **to** N **do**

$l_{ik} \rightarrow a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is} u_{sk} / u_{kk}$

end for

end for

Rozłożyć macierz $\mathbf{A}$ na iloczyn macierzy trójkątnych.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_1 = |2| \neq 0$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$-2 - 2 = -4 \neq 0$$

$$W_3 = \det(\mathbf{A}) = -1 \neq 0$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ - & 1 & 0 \\ - & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} - & - & - \\ 0 & - & - \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

Dla $i \in 1, 2, \dots, n$

Dla $j \in i, i+1, \dots, n$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}$$

Dla $j \in i+1, \dots, n$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \cdot (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot u_{ki})$$

Rozłożyć macierz $\mathbf{A}$ na iloczyn macierzy trójkątnych.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_1 = |2| \neq 0$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$-2 - 2 = -4 \neq 0$$

$$W_3 = \det(\mathbf{A}) = -1 \neq 0$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ - & 1 & 0 \\ - & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} - & - & - \\ 0 & - & - \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$i = 1$$

Dla $i \in 1, 2, \dots, n$

Dla $j \in i, i+1, \dots, n$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}$$

Dla $j \in i+1, \dots, n$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \cdot (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot u_{ki})$$

Rozłożyć macierz $\mathbf{A}$ na iloczyn macierzy trójkątnych.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_1 = |2| \neq 0$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$-2 - 2 = -4 \neq 0$$

$$W_3 = \det(\mathbf{A}) = -1 \neq 0$$

Dla $i \in 1, 2, \dots, n$

Dla $j \in i, i+1, \dots, n$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}$$

Dla $j \in i+1, \dots, n$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \cdot (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot u_{ki})$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ - & 1 & 0 \\ - & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} - & - & - \\ 0 & - & - \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$i = 1$$

$$j = 1 \quad u_{11} = a_{11} - \sum_{k=1}^0 l_{1k} \cdot u_{k1} = 2$$

Rozłożyć macierz $\mathbf{A}$ na iloczyn macierzy trójkątnych.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_1 = |2| \neq 0$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$-2 - 2 = -4 \neq 0$$

$$W_3 = \det(\mathbf{A}) = -1 \neq 0$$

Dla $i \in 1, 2, \dots, n$

Dla $j \in i, i+1, \dots, n$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}$$

Dla $j \in i+1, \dots, n$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \cdot (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot u_{ki})$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ - & 1 & 0 \\ - & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} - & - & - \\ 0 & - & - \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$i = 1$$

$$\begin{aligned} j = 1 & \quad u_{11} = a_{11} - \sum_{k=1}^0 l_{1k} \cdot u_{k1} = 2 \\ j = 2 & \quad u_{12} = a_{12} = 2 \end{aligned}$$

Rozłożyć macierz $\mathbf{A}$ na iloczyn macierzy trójkątnych.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_1 = |2| \neq 0$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$-2 - 2 = -4 \neq 0$$

$$W_3 = \det(\mathbf{A}) = -1 \neq 0$$

Dla $i \in 1, 2, \dots, n$

Dla $j \in i, i+1, \dots, n$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}$$

Dla $j \in i+1, \dots, n$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \cdot (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot u_{ki})$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ - & 1 & 0 \\ - & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} - & - & - \\ 0 & - & - \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$i = 1$$

$$j = 1 \quad u_{11} = a_{11} - \sum_{k=1}^0 l_{1k} \cdot u_{k1} = 2$$

$$j = 2 \quad u_{12} = a_{12} = 2$$

$$j = 3 \quad u_{13} = a_{13} = 3$$

Rozłożyć macierz $\mathbf{A}$ na iloczyn macierzy trójkątnych.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_1 = |2| \neq 0$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$-2 - 2 = -4 \neq 0$$

$$W_3 = \det(\mathbf{A}) = -1 \neq 0$$

Dla $i \in 1, 2, \dots, n$

Dla $j \in i, i+1, \dots, n$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}$$

Dla $j \in i+1, \dots, n$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \cdot (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot u_{ki})$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ - & 1 & 0 \\ - & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & - & - \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$i = 1$$

$$j = 1 \quad u_{11} = a_{11} - \sum_{k=1}^0 l_{1k} \cdot u_{k1} = 2$$

$$j = 2 \quad u_{12} = a_{12} = 2$$

$$j = 3 \quad u_{13} = a_{13} = 3$$

$$j = 2$$

Rozłożyć macierz $\mathbf{A}$ na iloczyn macierzy trójkątnych.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_1 = |2| \neq 0$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$-2 - 2 = -4 \neq 0$$

$$W_3 = \det(\mathbf{A}) = -1 \neq 0$$

Dla $i \in 1, 2, \dots, n$

Dla $j \in i, i+1, \dots, n$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}$$

Dla $j \in i+1, \dots, n$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \cdot (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot u_{ki})$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ - & 1 & 0 \\ - & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & - & - \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$i = 1$$

$$j = 1 \quad u_{11} = a_{11} - \sum_{k=1}^0 l_{1k} \cdot u_{k1} = 2$$

$$j = 2 \quad u_{12} = a_{12} = 2$$

$$j = 3 \quad u_{13} = a_{13} = 3$$

$$j = 2 \quad l_{21} =$$

$$\frac{1}{u_{11}} \cdot (a_{21} - \sum_{k=1}^0 l_{2k} \cdot u_{k1}) = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{1}{2}$$

Rozłożyć macierz $\mathbf{A}$ na iloczyn macierzy trójkątnych.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_1 = |2| \neq 0$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$-2 - 2 = -4 \neq 0$$

$$W_3 = \det(\mathbf{A}) = -1 \neq 0$$

Dla $i \in 1, 2, \dots, n$

Dla $j \in i, i+1, \dots, n$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}$$

Dla $j \in i+1, \dots, n$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \cdot (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot u_{ki})$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ - & 1 & 0 \\ - & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & - & - \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$i = 1$$

$$j = 1 \quad u_{11} = a_{11} - \sum_{k=1}^0 l_{1k} \cdot u_{k1} = 2$$

$$j = 2 \quad u_{12} = a_{12} = 2$$

$$j = 3 \quad u_{13} = a_{13} = 3$$

$$j = 2 \quad l_{21} =$$

$$\frac{1}{u_{11}} \cdot (a_{21} - \sum_{k=1}^0 l_{2k} \cdot u_{k1}) = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{1}{2}$$

$$j = 3 \quad l_{31} = \frac{1}{u_{11}} \cdot (a_{31}) = -\frac{1}{2}$$

Rozłożyć macierz $\mathbf{A}$ na iloczyn macierzy trójkątnych.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_1 = |2| \neq 0$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$-2 - 2 = -4 \neq 0$$

$$W_3 = \det(\mathbf{A}) = -1 \neq 0$$

Dla $i \in 1, 2, \dots, n$

Dla $j \in i, i+1, \dots, n$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}$$

Dla $j \in i+1, \dots, n$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \cdot (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot u_{ki})$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & - & - \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$i = 1$$

$$\begin{aligned} j = 1 & \quad u_{11} = a_{11} - \sum_{k=1}^0 l_{1k} \cdot u_{k1} = 2 \\ j = 2 & \quad u_{12} = a_{12} = 2 \\ j = 3 & \quad u_{13} = a_{13} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j = 2 & \quad l_{21} = \\ \frac{1}{u_{11}} \cdot (a_{21} - \sum_{k=1}^0 l_{2k} \cdot u_{k1}) &= \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{1}{2} \\ j = 3 & \quad l_{31} = \frac{1}{u_{11}} \cdot (a_{31}) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dla $i \in 1, 2, \dots, n$

Dla $j \in i, i+1, \dots, n$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}$$

Dla $j \in i+1, \dots, n$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \cdot (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot u_{ki})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & - & - \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$i = 2$$

Dla $i \in 1, 2, \dots, n$

Dla $j \in i, i+1, \dots, n$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}$$

Dla $j \in i+1, \dots, n$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \cdot (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot u_{ki})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & - & - \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$i = 2$$

$$j = 2$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21} \cdot u_{12} = -1 - \frac{1}{2} \cdot 2 = -2$$

Dla $i \in 1, 2, \dots, n$

Dla $j \in i, i+1, \dots, n$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}$$

Dla $j \in i+1, \dots, n$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \cdot (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot u_{ki})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & - & - \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$i = 2$$

$$j = 2$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21} \cdot u_{12} = -1 - \frac{1}{2} \cdot 2 = -2$$

$$j = 3$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21} \cdot u_{13} = 0 - \frac{1}{2} \cdot 3 = -\frac{3}{2}$$

Dla $i \in 1, 2, \dots, n$

Dla $j \in i, i+1, \dots, n$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}$$

Dla $j \in i+1, \dots, n$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \cdot (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot u_{ki})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3/2 \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$i = 2$$

$$j = 2$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21} \cdot u_{12} = -1 - \frac{1}{2} \cdot 2 = -2$$

$$j = 3$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21} \cdot u_{13} = 0 - \frac{1}{2} \cdot 3 = -\frac{3}{2}$$

Dla $i \in 1, 2, \dots, n$

Dla $j \in i, i+1, \dots, n$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}$$

Dla $j \in i+1, \dots, n$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \cdot (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot u_{ki})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3/2 \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$i = 2$$

$$j = 2$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21} \cdot u_{12} = -1 - \frac{1}{2} \cdot 2 = -2$$

$$j = 3$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21} \cdot u_{13} = 0 - \frac{1}{2} \cdot 3 = -\frac{3}{2}$$

$$j = 3$$

$$l_{32} = \frac{1}{u_{22}} \cdot (a_{32} - l_{31} \cdot u_{12}) = \frac{1}{-2} \cdot (2 - (-\frac{1}{2}) \cdot 2) = -\frac{3}{2}$$

Dla $i \in 1, 2, \dots, n$

Dla $j \in i, i+1, \dots, n$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}$$

Dla $j \in i+1, \dots, n$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \cdot (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot u_{ki})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3/2 \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$i = 2$$

$$j = 2$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21} \cdot u_{12} = -1 - \frac{1}{2} \cdot 2 = -2$$

$$j = 3$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21} \cdot u_{13} = 0 - \frac{1}{2} \cdot 3 = -\frac{3}{2}$$

$$j = 3$$

$$l_{32} = \frac{1}{u_{22}} \cdot (a_{32} - l_{31} \cdot u_{12}) = \frac{1}{-2} \cdot (2 - (-\frac{1}{2}) \cdot 2) = -\frac{3}{2}$$

Dla $i \in 1, 2, \dots, n$

Dla $j \in i, i+1, \dots, n$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}$$

Dla $j \in i+1, \dots, n$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \cdot (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot u_{ki})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3/2 \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$i = 2$$

$$j = 2$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21} \cdot u_{12} = -1 - \frac{1}{2} \cdot 2 = -2$$

$$j = 3$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21} \cdot u_{13} = 0 - \frac{1}{2} \cdot 3 = -\frac{3}{2}$$

$$j = 3$$

$$l_{32} = \frac{1}{u_{22}} \cdot (a_{32} - l_{31} \cdot u_{12}) = \frac{1}{-2} \cdot (2 - (-\frac{1}{2}) \cdot 2) = -\frac{3}{2}$$

$$i = 3$$

$$j = 3$$

$$\begin{aligned} u_{33} &= a_{33} - \sum_{k=1}^2 l_{3k} \cdot u_{k3} = \\ &= a_{33} - (l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23}) = \\ &= 1 - (-\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{3}{2} \cdot (-\frac{3}{2})) = 1 - (-\frac{3}{2} + \frac{3}{4}) = 1 - (-\frac{6}{4} + \frac{9}{4}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Dla $i \in 1, 2, \dots, n$

Dla $j \in i, i+1, \dots, n$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}$$

Dla $j \in i+1, \dots, n$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \cdot (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot u_{ki})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$i = 2$$

$$j = 2$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21} \cdot u_{12} = -1 - \frac{1}{2} \cdot 2 = -2$$

$$j = 3$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21} \cdot u_{13} = 0 - \frac{1}{2} \cdot 3 = -\frac{3}{2}$$

$$j = 3$$

$$l_{32} = \frac{1}{u_{22}} \cdot (a_{32} - l_{31} \cdot u_{12}) = \frac{1}{-2} \cdot (2 - (-\frac{1}{2}) \cdot 2) = -\frac{3}{2}$$

$$i = 3$$

$$j = 3$$

$$\begin{aligned} u_{33} &= a_{33} - \sum_{k=1}^2 l_{3k} \cdot u_{k3} = \\ &= a_{33} - (l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23}) = \\ &= 1 - (-\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{3}{2} \cdot (-\frac{3}{2})) = 1 - (-\frac{3}{2} + \frac{3}{4}) = 1 - (-\frac{6}{4} + \frac{9}{4}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Wybór elementu głównego

(ang. pivoting)

Przykład

$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & a_{1,n+1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & a_{3,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & a_{n,n+1}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\wedge_k a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$$

W implementacji $a_{kk}^{(k)} > \epsilon$

Niech $\epsilon \ll 1$

$$\begin{bmatrix} \epsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Eliminacja Gaussa $\rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \epsilon & 1 \\ 0 & 1 - \epsilon^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 - \epsilon^{-1} \end{bmatrix}$$

Redukcja wsteczna $\rightarrow$

$$x_2 = \frac{2 - \epsilon^{-1}}{1 - \epsilon^{-1}}$$

$$x_1 = (1 - x_2)\epsilon^{-1}$$

Niech $\epsilon = 10^{-8}$ ($\epsilon^{-1} = 10^8$), a więc:

$$2 - \epsilon^{-1} \approx -\epsilon^{-1}, \quad 1 - \epsilon^{-1} \approx -\epsilon^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tymczasem: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie:

zamiana kolejności równań

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eliminacja Gaussa $\rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 - \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 - 2\epsilon \end{bmatrix}$$

Redukcja wsteczna $\rightarrow$

$$x_2 = (1 - 2\epsilon)/(1 - \epsilon) \approx 1,$$

$$x_1 = (2 - x_2) \approx 1.$$

Wybór elementu głównego

- częściowy:

- wiersze

$$|a_{kk}^{(k-1)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k-1)}|$$

- kolumny

$$|a_{kk}^{(k-1)}| = \max_{k \leq j \leq n} |a_{kj}^{(k-1)}|$$

- pełny

$$|a_{kk}^{(k-1)}| = \max_{k \leq i, j \leq n} |a_{ij}^{(k)}|$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & a_{1,n+1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & a_{3,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & a_{n,n+1}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Macierz permutacji

- dodanie do i -tego wiersza macierzy j -tego wiersza pomnożonego przez liczbę k

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & & i & & j & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ i & \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & \dots & & 1 & \dots & & k & \dots \\ & & & \vdots & & & \vdots & \\ & & & 1 & & & \vdots & \\ & & & \vdots & & & \vdots & \\ j & \left[\begin{array}{cccccccc} & & & & & & 1 & \\ & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & \vdots & \\ & & & 0 & \dots & & 1 & \\ & & & \vdots & & & \vdots & \\ & & & \vdots & & & \vdots & \\ & & & \vdots & & & \vdots & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

Dla kolumn: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T$

Wybór elementu głównego – rozkład PLU

A =

-3	-3	-4	-8	-7
-6	7	5	-9	1
-5	2	5	1	-1
2	1	-2	6	-10
-1	8	1	9	-3

>> [L,U,P]=lu(A)

L =

1.0000	0	0	0	0
0.1667	1.0000	0	0	0
0.5000	-0.9512	1.0000	0	0
0.8333	-0.5610	-0.1462	1.0000	0
-0.3333	0.4878	0.0654	-0.1660	1.0000

U =

-6.0000	7.0000	5.0000	-9.0000	1.0000
0	6.8333	0.1667	10.5000	-3.1667
0	0	-6.3415	6.4878	-10.5122
0	0	0	15.3385	-5.1462
0	0	0	0	-8.2889

P =

0	1	0	0	0
0	0	0	0	1
1	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0

Rozkład PLU

Ostatecznie

$$\mathbf{LU} = \mathbf{PA}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{PAx} = \mathbf{Pb}$$

$$\mathbf{LUx} = \mathbf{Pb}$$

$$\begin{cases} \mathbf{Ly} = \mathbf{Pb} \\ \mathbf{Ux} = \mathbf{y} \end{cases}$$

Obliczanie wyznacznika macierzy:

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^p \prod_{i=1}^n u_{ii},$$

gdzie p jest liczbą przestawień kolumn i wierszy.

Metoda Cholesky'ego -Banachiewicza/-Crouta

dla macierzy symetrycznych, dodatnio określonych
jeśli $\mathbf{A}$ jest rzeczywista, symetryczna i dodatnio określona
 $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{U}$

Twierdzenie

Macierz rzeczywista $\mathbf{A}$ jest dodatnio określona gdy:

- *jest symetryczna i dla każdego niezerowego wektora $x \in \mathbb{R}^n$ zachodzi: $x^T A x > 0$*

Równoważnie:

- *wszystkie jej wartości własne są dodatnie*

Równoważnie:

- *jest symetryczna i wszystkie jej wiodące minory główne są dodatnie (kryterium Sylvestra)*

Równoważnie:

- *jest symetryczna, ściśle dominująca na przekątnej głównej, a wszystkie jej elementy diagonalne są dodatnie*

Metoda Cholesky'ego

- algorytm Cholesky'ego-Banachiewicza – elementy wyznaczone wierszami
- algorytm Cholesky'ego-Crouta – elementy wyznaczone kolumnami

Dla $i = 1, 2, \dots, n$

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}$$

Dla $j > i$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} \cdot u_{kj}}{u_{ii}}$$

Dla $j < i$

$$u_{ij} = 0$$

Przykład

Rozłożyć macierz A na iloczyn macierzy trójkątnych.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 2 \\ -6 & 2 & 21 \end{bmatrix}$$

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ki} \cdot u_{kj}}{u_{ii}}, \quad j > i$$

$$i = 1$$

$$j = 1$$

$$u_{11} = \sqrt{a_{11}} = 3$$

$$j = 2$$

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{u_{11}} = 0$$

$$j = 3$$

$$u_{13} = \frac{a_{13}}{u_{11}} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$i = 2$$

$$j = 2$$

$$u_{22} = \sqrt{a_{22} - u_{12}^2} = \sqrt{4 - 0^2} = 2$$

$$j = 3$$

$$u_{23} = \frac{a_{23} - g_{12} \cdot g_{13}}{g_{22}} = \frac{2 - 0}{2} = 1$$

$$i = 3$$

$$j = 3$$

$$u_{33} = \sqrt{a_{33} - (u_{13}^2 + u_{23}^2)} = \sqrt{21 - (4 + 1)} = \sqrt{16} = 4$$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = L^T$$

$$U^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = L$$

$$A = LL^T \quad (8)$$

Układy trójkątne

- zapamiętując L i U można szybko rozwiązać wiele układów różniących się wektorami b
- szukanie A^{-1} za pomocą metody LU polega na rozwiązaniu n układów równań:

$$L \cdot U \cdot x^{(i)} = e^{(i)}$$

$e^{(i)}$ – i -ty wyraz n wymiarowej przestrzeni

$$e^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x^{(i)}$ – i -ta kolumna macierzy odwrotnej

Układy trójkątne

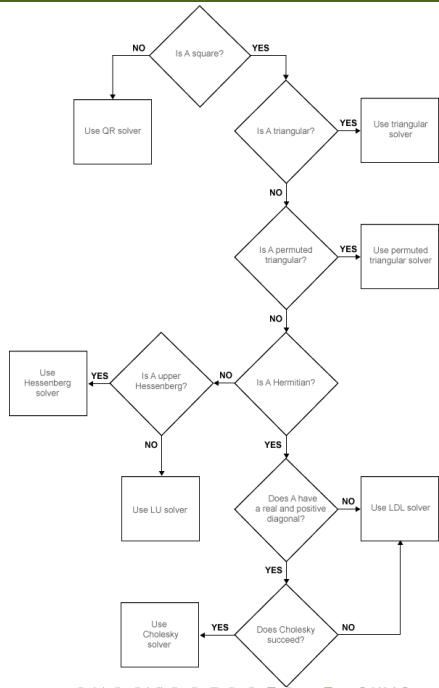
- wyznacznik

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= \\ \det \mathbf{LU} &= \det \mathbf{L} \cdot \det \mathbf{U} = && \text{tw. Cauchy'ego} \\ &= \prod_{k=1}^n l_{kk} \cdot \prod_{k=1}^n u_{kk} && \rightarrow \text{rozwinięcie Laplace'a}\end{aligned}$$

Układy liniowe nadokreślone $\rightarrow$ rozwiązanie średniokwadratowe $\rightarrow$
wykład o aproksymacji

Matlab/Octave → operator
lewostronnego dzielenia

```
1 A = [1 1 1; 1 2 3; 3 2 1] ;
2 b = [3 6 6]' ;
3
4 x = A\b ;
```



Dziękuję za uwagę