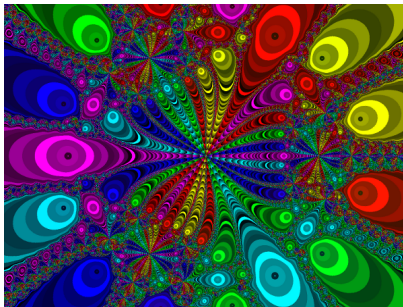


# Metody numeryczne

## Wykład 2

### Rozwiązanie równań nieliniowych



# Ogólne sformułowanie zadania

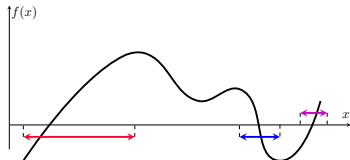
Niech dana będzie funkcja

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Zadanie:

znaleźć  $x^*$ , dla którego

$$f(x^*) = 0$$



Brak uniwersalnej metody ścisłej  $\rightarrow$  metody iteracyjne (rozwiązanie otrzymywane w procesie kolejnych przybliżeń):

$$x_{n+1} := \Phi(x_n)$$

Warunek : ciąg przybliżeń  $x_0, x_1, x_2, \dots$  zbieżny do rozwiązania dokładnego  $x^*$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$$

Przykłady:

- astronomia (równanie Keplera)  
 $x - a \sin(x) - b = 0$
- teoria dyfrakcji światła  
 $x - \operatorname{tg} x = 0$
- węzły kwadratur Gaussa  
 $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$

# Rząd zbieżności

## Definicja

*Metoda iteracyjna  $\Phi$  jest w klasie funkcji  $F$  rzędu co najmniej  $p \geq 1$  pod następującym warunkiem:*

*Jeśli  $f \in F$  i  $f(x^*) = 0$ , wtedy istnieje stała  $C < \infty$  taka, że dla dowolnych przybliżeń początkowych  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  dostatecznie bliskich  $x^*$ , kolejne przybliżenia  $x_n$  generowane tą metodą spełniają nierówność*

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^p$$

*Ponadto, jeśli  $p = 1$  dodatkowo żąda się, aby  $C < 1$ .*

$p$  – rząd (wykładnik) zbieżności metody

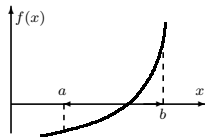
$C$  – stała asymptotyczna błędów metody

*Zbieżność globalna* – konstruowany ciąg przybliżeń  $\{x_n\}$  jest zbieżny do  $x^*$  przy dowolnych przybliżeniach początkowych.

*Zbieżność lokalna* – ciągu przybliżeń  $\{x_n\}$  jest zbieżny do  $x^*$  pod warunkiem, że początkowe przybliżenia wybrano "dostatecznie" blisko  $x^*$ .

### Twierdzenie (Bolzano-Cauchy'ego)

*Jeśli funkcja  $f(x)$  jest ciągła w przedziale domkniętym  $\langle a, b \rangle$  i  $f(a)f(b) < 0$ , to istnieje przynajmniej jeden taki punkt  $c \in \langle a, b \rangle$ , dla którego  $f(c) = 0$ .  
( $\rightarrow$  tw. Darboux)*



*Przedział izolacji (pierwiastka) – przedział  $\langle a, b \rangle$ , w którym znajduje się jeden pojedynczy pierwiastek równania  $f(x)$  ( $f$  cg.,  $f(a)f(b) < 0$ ,  $\text{sgn} f'(x) = \text{const}$ ).*

Przykładowe metody lokalizowania pierwiastków rzeczywistych:

- 1 wykres funkcji
- 2 metoda graficzna (ołówkowa) - jeśli równanie  $f(x) = 0$  można przekształcić do postaci równoważnej  $g(x) = h(x)$  w której wykresy funkcji  $g$  i  $h$  są łatwiejsze do wykonania;  
pierwiastki  $f \rightarrow$  odcięte punktów przecięcia  $g$  i  $h$

### Przykład

$$\log x + x = 0$$

$$\log x = -x$$

- 3 metoda tablicowania funkcji w przedziale jej określoności  $x \in \langle a, b \rangle$  w  $m$  równoodległych punktach  $x_i = a + ih$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) z krokiem  $h = (b - a)/m$

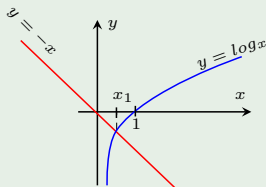
Przykładowe metody lokalizowania pierwiastków rzeczywistych:

- 1 wykres funkcji
- 2 metoda graficzna (ołówkowa) - jeśli równanie  $f(x) = 0$  można przekształcić do postaci równoważnej  $g(x) = h(x)$  w której wykresy funkcji  $g$  i  $h$  są łatwiejsze do wykonania;  
pierwiastki  $f \rightarrow$  odczyte punktów przecięcia  $g$  i  $h$

### Przykład

$$\log x + x = 0$$

$$\log x = -x$$



- 3 metoda tablicowania funkcji w przedziale jej określoności  $x \in \langle a, b \rangle$  w  $m$  równoodległych punktach  $x_i = a + ih$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) z krokiem  $h = (b - a)/m$

# Metoda bisekcji (połowienia przedziału)

## Założenia:

- $f$  jest funkcją ciągłą w  $\langle a, b \rangle$
- $f(a)f(b) < 0$  ( $f$  zmienia znak)
- jeden pierwiastek w  $\langle a, b \rangle$

$$x_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad (n \geq 0).$$

## Warunki stopu:

- $|b_n - a_n| \leq \delta$
- $|f(x_n)| \leq \epsilon$
- $n > n_{max}$

# Metoda bisekcji (połowienia przedziału)

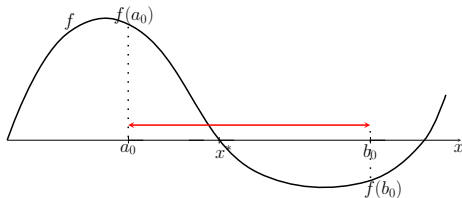
## Założenia:

- $f$  jest funkcją ciągłą w  $\langle a, b \rangle$
- $f(a)f(b) < 0$  ( $f$  zmienia znak)
- jeden pierwiastek w  $\langle a, b \rangle$

$$x_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad (n \geq 0).$$

## Warunki stopu:

- $|b_n - a_n| \leq \delta$
- $|f(x_n)| \leq \epsilon$
- $n > n_{max}$





# Metoda bisekcji (połowienia przedziału)

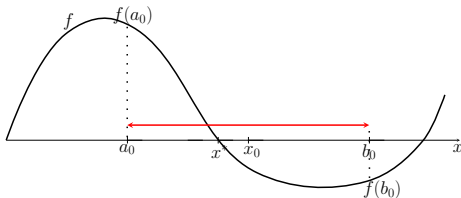
## Założenia:

- $f$  jest funkcją ciągłą w  $\langle a, b \rangle$
- $f(a)f(b) < 0$  ( $f$  zmienia znak)
- jeden pierwiastek w  $\langle a, b \rangle$

$$x_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad (n \geq 0).$$

## Warunki stopu:

- $|b_n - a_n| \leq \delta$
- $|f(x_n)| \leq \epsilon$
- $n > n_{max}$



# Metoda bisekcji (połowienia przedziału)

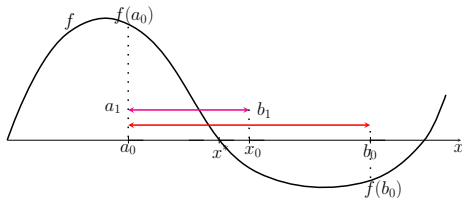
## Założenia:

- $f$  jest funkcją ciągłą w  $\langle a, b \rangle$
- $f(a)f(b) < 0$  ( $f$  zmienia znak)
- jeden pierwiastek w  $\langle a, b \rangle$

$$x_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad (n \geq 0).$$

## Warunki stopu:

- $|b_n - a_n| \leq \delta$
- $|f(x_n)| \leq \epsilon$
- $n > n_{max}$



# Metoda bisekcji (połowienia przedziału)

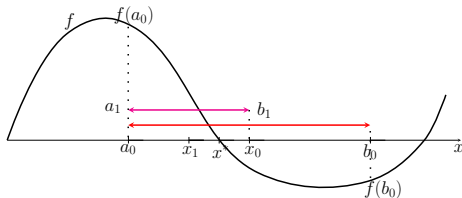
## Założenia:

- $f$  jest funkcją ciągłą w  $\langle a, b \rangle$
- $f(a)f(b) < 0$  ( $f$  zmienia znak)
- jeden pierwiastek w  $\langle a, b \rangle$

$$x_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad (n \geq 0).$$

## Warunki stopu:

- $|b_n - a_n| \leq \delta$
- $|f(x_n)| \leq \epsilon$
- $n > n_{max}$





# Metoda bisekcji (połowienia przedziału)

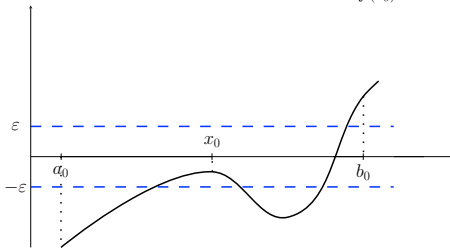
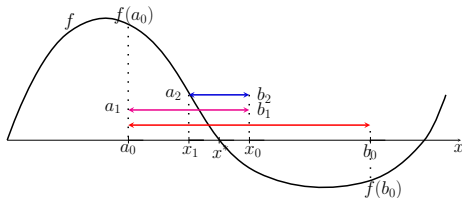
## Założenia:

- $f$  jest funkcją ciągłą w  $\langle a, b \rangle$
- $f(a)f(b) < 0$  ( $f$  zmienia znak)
- jeden pierwiastek w  $\langle a, b \rangle$

$$x_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad (n \geq 0).$$

## Warunki stopu:

- $|b_n - a_n| \leq \delta$
- $|f(x_n)| \leq \epsilon$
- $n > n_{max}$



# Algorytm

**Dane:**  $a, b, M, \delta, \epsilon$

**Wyniki:**  $n, x, f(x)$

$fa \leftarrow f(a); fb \leftarrow f(b);$

$e \leftarrow b - a;$

**if**  $\text{sgn}(fa) = \text{sgn}(fb)$  **then**

**return** error;

**end if**

**for**  $n \leftarrow 1$  **to**  $M$  **do**

$e \leftarrow e/2;$

$x \leftarrow a + e; \{x = (a + b)/2\}$

$fx \leftarrow f(x);$

**if**  $|e| < \delta$  **or**  $|fx| < \epsilon$  **then**

**return**  $n, x, fx$

**end if**

**if**  $\text{sgn}(fx) \neq \text{sgn}(fa)$  **then**

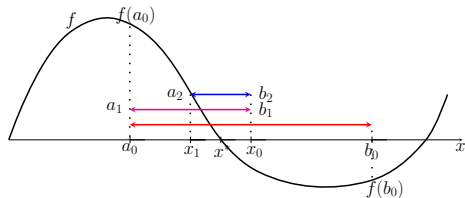
$b \leftarrow x; fb \leftarrow fx;$

**else**

$a \leftarrow x; fa \leftarrow fx;$

**end if**

**end for**



## Zalety:

- prostota
- proste oszacowanie błędu
- zbieżność globalna

## Wady

- wolna zbieżność (jedną dokładną cyfrę binarną jest uzyskiwana przy każdym podziale  $\implies$  jedna cyfra dziesiętna jest uzyskiwana średnio co 3.3 podziały)

# Zbieżność

## Twierdzenie

*Niech  $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \dots$  będzie ciągiem przedziałów konstruowanych przez metodę bisekcji. Wówczas granice  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  istnieją, są identyczne i równe zeru funkcji  $f$ . Jeśli  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , gdzie  $x_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ , to*

$$|x^* - c_n| \leq 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0).$$



## Przykład

Ile iteracji metody bisekcji da oszacowanie pierwiastka z dokładnością do  $k$ -tego miejsca po przecinku (w systemie dziesiętnym).

Wartość  $x^*$  jest przybliżona do  $k$ -tego miejsca po przecinku

$$|x^* - \tilde{x}| = \epsilon_x \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$$

bo

$$x^* = 1.2483571$$

$$k = 1, \tilde{x} = 1.2$$

$$\epsilon = 0.0483 \dots < 0.05 =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 10^{-1}$$

$$k = 2, \tilde{x} = 1.25$$

$$\epsilon = 0.0016 \dots < 0.005 =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$$

$$k = 3, \tilde{x} = 1.248$$

$$\epsilon = 0.0003 \dots < 0.0005 =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$$

itd.

Błąd m.b. w pierwszym kroku wynosi:

$$\epsilon_1 < \frac{1}{2}(b - a)$$

$$\epsilon_2 < \frac{1}{2}\epsilon_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(b - a) = \frac{1}{2^2}(b - a)$$

$\vdots$

$$\epsilon_n < \frac{1}{2^n}(b - a)$$

$$\frac{1}{2^n}(b - a) \leq \frac{1}{2}10^{-k}$$

$$\frac{2^n}{b-a} \geq \frac{2}{10^{-k}}$$

$$2^n \geq 2 \cdot 10^k(b - a)$$

$$\log_2 2^n \geq \log_2 2 \cdot 10^k(b - a)$$

$$n \geq \log_2 2 \cdot 10^k(b - a)$$

$$n = \lceil \log_2 2 \cdot 10^k(b - a) \rceil$$

bo  $n$  musi być liczbą naturalną



# Regula falsi

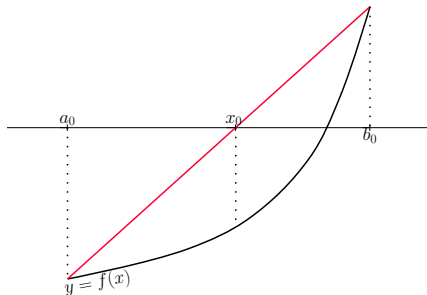
regula - linia/reguła

falsus - fałszywy

Vaishali Ganit (Indie, III w.  
p.n.e.)

Założenia:

- $f$  ciągła w  $\langle a, b \rangle$
- $f(a)f(b) < 0$
- jeden pierwiastek w  $\langle a, b \rangle$



Warunki stopu:

- $|b_n - a_n| \leq \delta$
- $|f(x_n)| \leq \epsilon$
- $n > n_{max}$

$$x_n = b_n - \frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)} \cdot f(b_n)$$

# Regula falsi

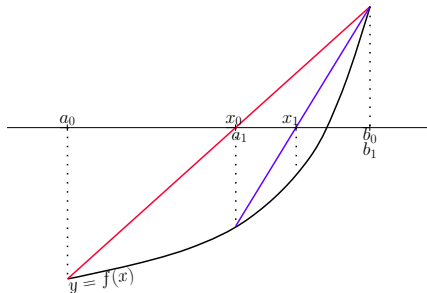
regula - linia/reguła

falsus - fałszywy

Vaishali Ganit (Indie, III w.  
p.n.e.)

Założenia:

- $f$  ciągła w  $\langle a, b \rangle$
- $f(a)f(b) < 0$
- jeden pierwiastek w  $\langle a, b \rangle$



Warunki stopu:

- $|b_n - a_n| \leq \delta$
- $|f(x_n)| \leq \epsilon$
- $n > n_{max}$

$$x_n = b_n - \frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)} \cdot f(b_n)$$

# Regula falsi

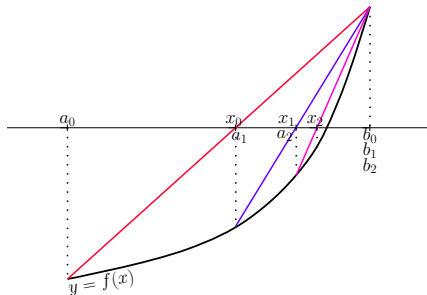
regula - linia/reguła

falsus - fałszywy

Vaishali Ganit (Indie, III w.  
p.n.e.)

Założenia:

- $f$  ciągła w  $\langle a, b \rangle$
- $f(a)f(b) < 0$
- jeden pierwiastek w  $\langle a, b \rangle$



Warunki stopu:

- $|b_n - a_n| \leq \delta$
- $|f(x_n)| \leq \epsilon$
- $n > n_{max}$

$$x_n = b_n - \frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)} \cdot f(b_n)$$

# Algorytm

**Dane:**  $a, b, M, \delta, \epsilon$

**Wyniki:**  $n, x, f(x)$

$fa \leftarrow f(a); fb \leftarrow f(b);$

**if**  $\text{sgn}(fa) = \text{sgn}(fb)$  **then**

**return** error;

**end if**

**for**  $n \leftarrow 1$  **to**  $M$  **do**

$e \leftarrow b - a;$

$x \leftarrow b - (b - a) / (fb - fa) \cdot fb$

$fx \leftarrow f(x);$

**if**  $|e| < \delta$  **or**  $|fx| < \epsilon$  **then**

**return**  $n, x, fx$

**end if**

**if**  $\text{sgn}(fx) \neq \text{sgn}(fa)$  **then**

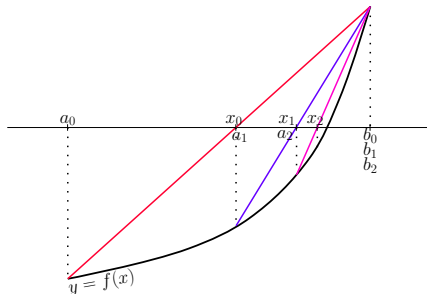
$b \leftarrow x; fb \leftarrow fx;$

**else**

$a \leftarrow x; fa \leftarrow fx;$

**end if**

**end for**



Zalety:

- prostota
- proste oszacowanie błędu
- zbieżność globalna (pod warunkiem spełnienia warunków)

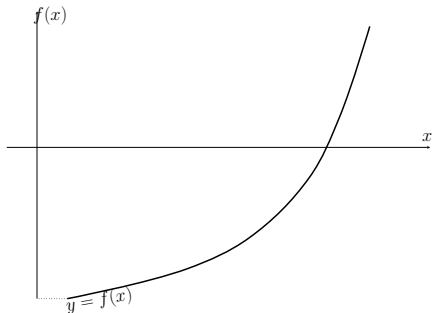
Wady

- nadal wolna zbieżność

# Metoda siecznych

## Założenia:

- $f$  ciągła w  $\langle a, b \rangle$
- $f(a)f(b) < 0$  *ale brak wymagania aby*  
 $f(x_{n-1})f(x_n) < 0$
- jeden pierwiastek w  $\langle a, b \rangle$
- $f \in C^2$ ,  $\text{sgn}(f') = \text{const}$ ,  
 $\text{sgn}(f'') = \text{const}$



## Warunki stopu:

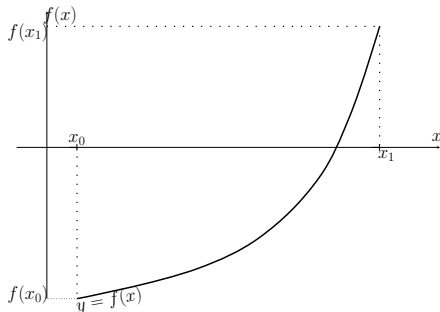
- $|x_n - x_{n-1}| \leq \delta$
- $|f(x_n)| \leq \epsilon$
- $n > n_{max}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$

# Metoda siecznych

## Założenia:

- $f$  ciągła w  $\langle a, b \rangle$
- $f(a)f(b) < 0$  *ale brak wymagania aby*  
 $f(x_{n-1})f(x_n) < 0$
- jeden pierwiastek w  $\langle a, b \rangle$
- $f \in C^2$ ,  $\text{sgn}(f') = \text{const}$ ,  
 $\text{sgn}(f'') = \text{const}$



## Warunki stopu:

- $|x_n - x_{n-1}| \leq \delta$
- $|f(x_n)| \leq \epsilon$
- $n > n_{max}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$

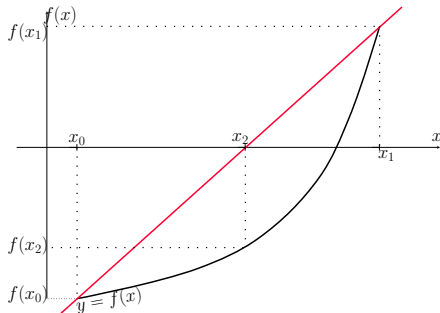
$$x_n = b_n - \frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)} \cdot f(b_n)$$



# Metoda siecznych

## Założenia:

- $f$  ciągła w  $\langle a, b \rangle$
- $f(a)f(b) < 0$  *ale brak wymagania aby*  
 $f(x_{n-1})f(x_n) < 0$
- jeden pierwiastek w  $\langle a, b \rangle$
- $f \in C^2$ ,  $\text{sgn}(f') = \text{const}$ ,  
 $\text{sgn}(f'') = \text{const}$



## Warunki stopu:

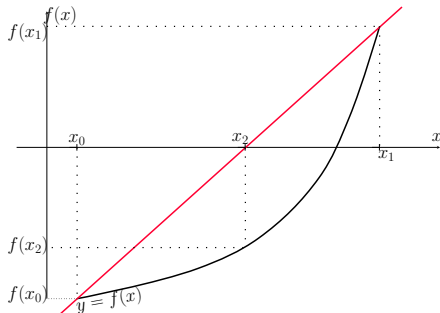
- $|x_n - x_{n-1}| \leq \delta$
- $|f(x_n)| \leq \epsilon$
- $n > n_{max}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$

# Metoda siecznych

## Założenia:

- $f$  ciągła w  $\langle a, b \rangle$
- $f(a)f(b) < 0$  *ale brak wymagania aby*  
 $f(x_{n-1})f(x_n) < 0$
- jeden pierwiastek w  $\langle a, b \rangle$
- $f \in C^2$ ,  $\text{sgn}(f') = \text{const}$ ,  
 $\text{sgn}(f'') = \text{const}$



## Warunki stopu:

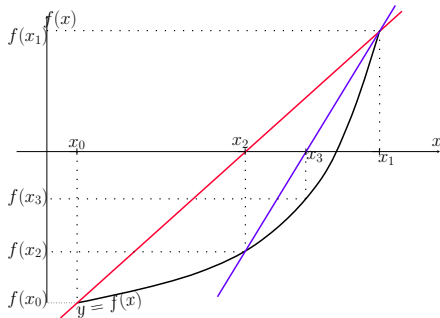
- $|x_n - x_{n-1}| \leq \delta$
- $|f(x_n)| \leq \epsilon$
- $n > n_{max}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$

# Metoda siecznych

## Założenia:

- $f$  ciągła w  $\langle a, b \rangle$
- $f(a)f(b) < 0$  *ale brak wymagania aby*  
 $f(x_{n-1})f(x_n) < 0$
- jeden pierwiastek w  $\langle a, b \rangle$
- $f \in C^2$ ,  $\text{sgn}(f') = \text{const}$ ,  
 $\text{sgn}(f'') = \text{const}$



## Warunki stopu:

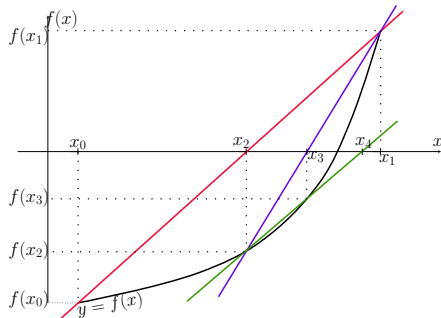
- $|x_n - x_{n-1}| \leq \delta$
- $|f(x_n)| \leq \epsilon$
- $n > n_{max}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$

# Metoda siecznych

## Założenia:

- $f$  ciągła w  $\langle a, b \rangle$
- $f(a)f(b) < 0$  *ale brak wymagania aby*  
 $f(x_{n-1})f(x_n) < 0$
- jeden pierwiastek w  $\langle a, b \rangle$
- $f \in C^2$ ,  $\text{sgn}(f') = \text{const}$ ,  
 $\text{sgn}(f'') = \text{const}$



## Warunki stopu:

- $|x_n - x_{n-1}| \leq \delta$
- $|f(x_n)| \leq \epsilon$
- $n > n_{max}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$

# Algorytm

**Dane:**  $x_{n-1}, x_n, M, \delta, \epsilon$

**Wyniki:**  $n, \tilde{x}, f(\tilde{x})$

$f_{n-1} \leftarrow f(x_{n-1}); f_n \leftarrow f(x_n);$

**for**  $n \leftarrow 1$  **to**  $M$  **do**

$x_{n+1} = x_n - (x_n - x_{n-1}) / (f_n - f_{n-1}) \cdot f_n ;$

$f_{n+1} = f(x_{n+1}) ;$

$x_{n-1} \leftarrow x_n; f_{n-1} \leftarrow f_n;$

$x_n \leftarrow x_{n+1}; f_n \leftarrow f_{n+1};$

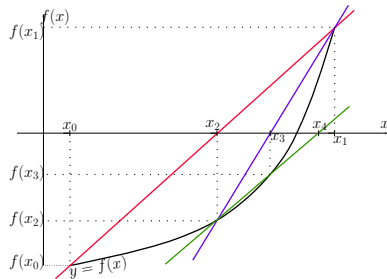
**if**  $|x_n - x_{n-1}| < \delta$  **or**  $|f_n| < \epsilon$  **then**

**return**  $n, x_n, f_n;$

**end if**

**end for**

Powyższy algorytm korzysta z funkcji liczącej  $f(x)$ .

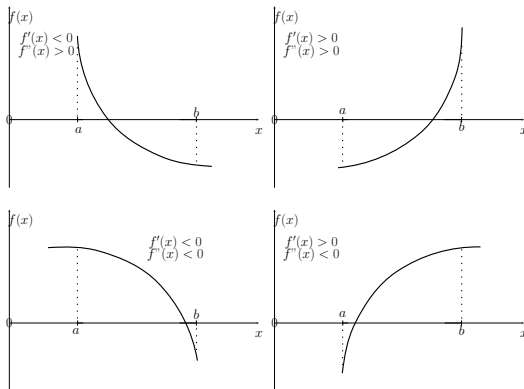
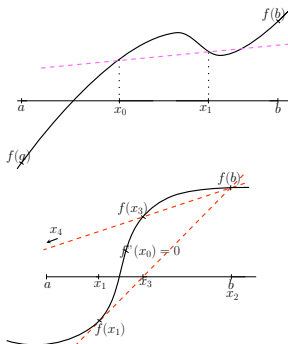


Zalety:

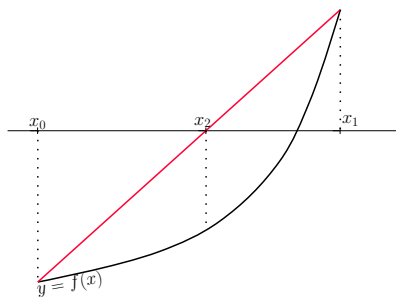
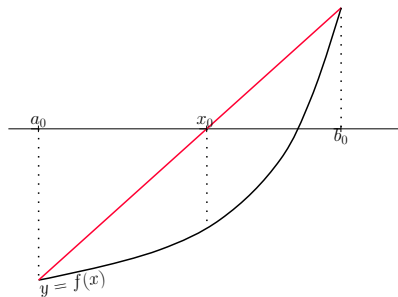
- szybka zbieżność

Wady

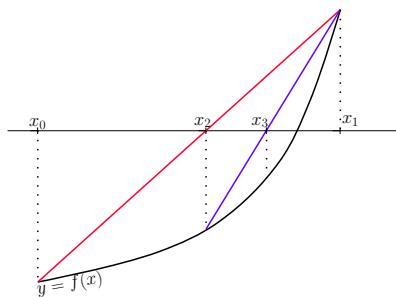
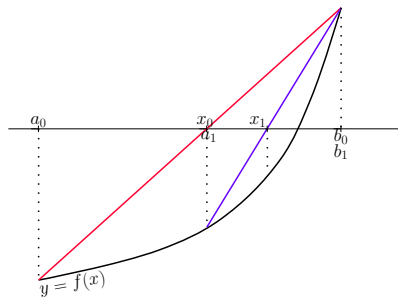
- zbieżność lokalna



## R. fałsi a m. siecznych

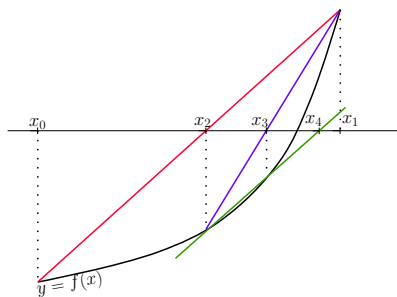
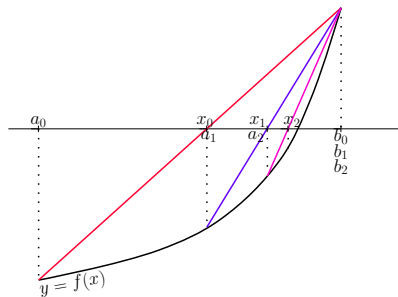


## R. fałsi a m. siecznych





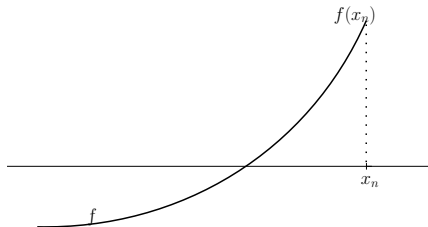
## R. fałsi a m. siecznych



# Metoda stycznych (Newtona/ Newtona-Raphsona)

## Założenia:

- $f$  ciągła w  $\langle a, b \rangle$
- $f(a)f(b) < 0$  *ale brak wymagania aby*  
 $f(x_{n-1})f(x_n) < 0$
- jeden pierwiastek w  $\langle a, b \rangle$
- $f \in C^2$ ,  $\text{sgn}(f') = \text{const}$ ,  
 $\text{sgn}(f'') = \text{const}$



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

## Warunki stopu:

- $|x_n - x_{n-1}| \leq \delta$
- $|f(x_n)| \leq \epsilon$
- $n > n_{max}$

Rozwinięcie w sz. Taylora

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \mathcal{O}((x - x_n)^2)$$

Linearyzacja

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

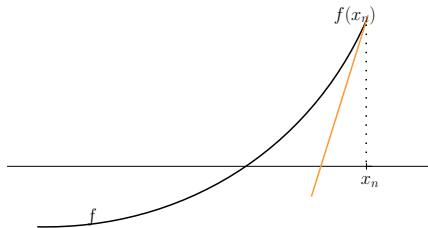
$$\text{Skoro } f(x) = 0 \implies f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0 \implies$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n + h_n \quad (n \geq 0)$$

# Metoda stycznych (Newtona/ Newtona-Raphsona)

## Założenia:

- $f$  ciągła w  $\langle a, b \rangle$
- $f(a)f(b) < 0$  *ale brak wymagania aby*  
 $f(x_{n-1})f(x_n) < 0$
- jeden pierwiastek w  $\langle a, b \rangle$
- $f \in C^2$ ,  $\text{sgn}(f') = \text{const}$ ,  
 $\text{sgn}(f'') = \text{const}$



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

## Warunki stopu:

- $|x_n - x_{n-1}| \leq \delta$
- $|f(x_n)| \leq \epsilon$
- $n > n_{max}$

Rozwinięcie w sz. Taylora

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \mathcal{O}((x - x_n)^2)$$

Linearyzacja

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

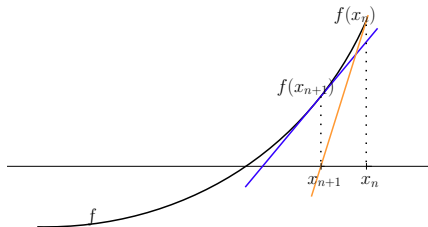
$$\text{Skoro } f(x) = 0 \implies f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0 \implies$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n + h_n \quad (n \geq 0)$$

# Metoda stycznych (Newtona/ Newtona-Raphsona)

## Założenia:

- $f$  ciągła w  $\langle a, b \rangle$
- $f(a)f(b) < 0$  *ale brak wymagania aby*  
 $f(x_{n-1})f(x_n) < 0$
- jeden pierwiastek w  $\langle a, b \rangle$
- $f \in C^2$ ,  $\text{sgn}(f') = \text{const}$ ,  
 $\text{sgn}(f'') = \text{const}$



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

## Warunki stopu:

- $|x_n - x_{n-1}| \leq \delta$
- $|f(x_n)| \leq \epsilon$
- $n > n_{max}$

Rozwinięcie w sz. Taylora

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \mathcal{O}((x - x_n)^2)$$

Linearyzacja

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

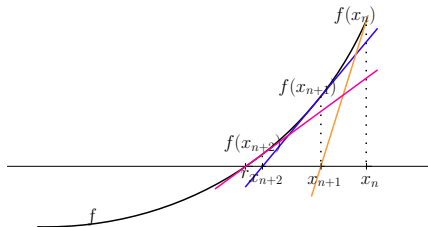
$$\text{Skoro } f(x) = 0 \implies f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0 \implies$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n + h_n \quad (n \geq 0)$$

# Metoda stycznych (Newtona/ Newtona-Raphsona)

## Założenia:

- $f$  ciągła w  $\langle a, b \rangle$
- $f(a)f(b) < 0$  *ale brak wymagania aby*  
 $f(x_{n-1})f(x_n) < 0$
- jeden pierwiastek w  $\langle a, b \rangle$
- $f \in C^2$ ,  $\text{sgn}(f') = \text{const}$ ,  
 $\text{sgn}(f'') = \text{const}$



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

## Warunki stopu:

- $|x_n - x_{n-1}| \leq \delta$
- $|f(x_n)| \leq \epsilon$
- $n > n_{max}$

Rozwinięcie w sz. Taylora

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \mathcal{O}((x - x_n)^2)$$

Linearyzacja

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

$$\text{Skoro } f(x) = 0 \implies f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0 \implies$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n + h_n \quad (n \geq 0)$$

# Algorytm

**Dane:**  $x_0, M, \delta, \epsilon$

**Wyniki:**  $n, \tilde{x}, f(\tilde{x})$

$x_n \leftarrow f(x_0); f_n \leftarrow f(x_n);$

**if**  $|f_n| < \epsilon$  **then**

**return** 0,  $x_n, f_n$ ;

**end if**

**for**  $n \leftarrow 1$  to  $M$  **do**

$x_{n+1} \leftarrow x_n - f_n / f'(x_n);$

$f_{n+1} \leftarrow f(x_{n+1});$

**if**  $|x_{n+1} - x_n| < \delta$  **or**  $|f_{n+1}| < \epsilon$

**then**

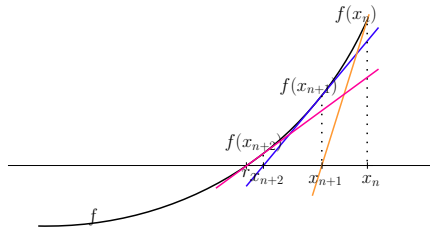
**return**  $n, x_{n+1}, f_{n+1}$ ;

**end if**

$x_n \leftarrow x_{n+1};$

$f_n \leftarrow f_{n+1};$

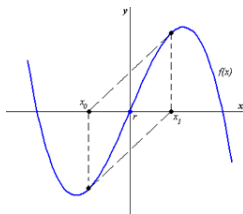
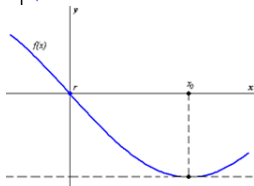
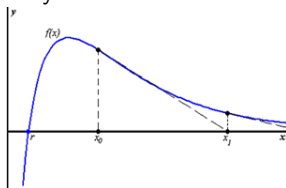
**end for**



Algorytm korzysta z funkcji liczących  $f(x)$  i  $f'(x)$ .

## Kiedy zawodzi?

Wady:  
 zbieżność lokalna  
 Zalety:  
 Szybka zbieżność (lokalna)



## M. stycznych a m. siecznych

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x} \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \approx f'(x_n)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$



## Przykład

Wyprowadzić znany wzór na obliczanie pierwiastka kwadratowego liczby  $a$   
 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ , gdzie  $x_0$  pierwszą aproksymacją pierwiastka liczby  $a$ , ze wzoru metody stycznych Newtona.

$$\sqrt[2]{a} = ?$$

$$\sqrt[2]{a} = x$$

$$a = x^2$$

$$\underbrace{x^2 - a}_{f(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^2 - a \quad f'(x) = 2 \cdot x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2 \cdot x_n} = x_n - \frac{1}{2} \cdot x_n + \frac{a}{2 \cdot x_n} = \frac{1}{2} \cdot \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$



# Metoda iteracji prostych (Banacha)

Stefan Banach (1892-1945)

$$f(x) = 0 \rightarrow x = \Phi(x)$$

$x$  – punkt stały odwzorowania  $\Phi$

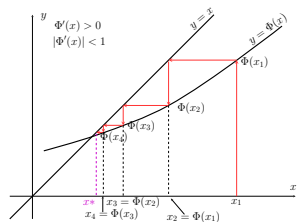
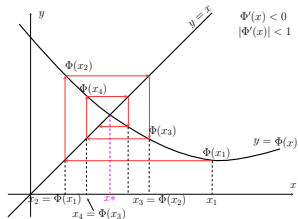
Wybieramy początkowe  $x_0$ , a następnie:

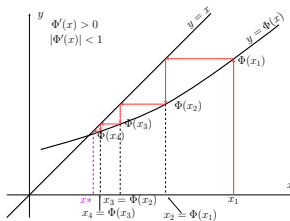
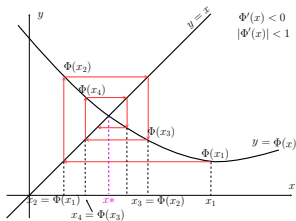
$$x_{n+1} = \Phi(x_n)$$

Założenia:

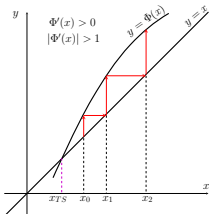
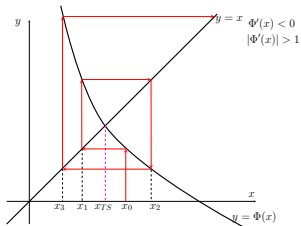
- $\Phi$  jest funkcją ciągłą w  $\langle a, b \rangle$
- $\Phi \in C^2$
- $|\Phi'(x)| < 1$  w otoczeniu pierwiastka

Warunki stopu: j.w.





Przykłady  
zbieżności



Przykłady  
rozbieżności

# Przykład

Jeśli  $|\Phi'(x)| < 1$  (w pobliżu pierwiastka)

$$f(x) = 0 \quad / \cdot k$$

$$kf(x) + x = x$$

$$\Phi_2' = 1 + kf'(x)$$

Szukamy  $k$  takiego, aby  $|\Phi_2'| < 1$

## Przykład

$$x^2 - 2 = 0$$

Szukamy  $x \in < 1, 2 >$

$$x = \frac{2}{x}$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{x} \implies \Phi'(x) = \frac{-2}{x^2}, \text{ a wtedy } |\Phi'(1)| = |-2| > 1 !$$

$$x = x + k(x^2 - 2)$$

$$\Phi_2'(x) = 1 + 2kx$$

$$x = 1$$

$$\Phi_2'(x) = 1 + 2k$$

$$|1 + 2k| < 1$$

$$1 + 2k < 1 \wedge 1 + 2k > -1$$

$$k < 0 \wedge k > -1$$

$$x = 2$$

$$\Phi_2'(x) = 1 + 4k$$

$$|1 + 4k| < 1$$

$$1 + 4k < 1 \wedge 1 + 4k > -1$$

$$k < 0 \wedge k > -\frac{1}{2}$$

$$k \in (-0.5, 0)$$

Niech  $k = -0.25$

$$\Phi_2'(x) = 1 + 2 \cdot (-0.25)x$$

$$\Phi_2'(x) = 1 - 0.5x$$

$$x = x - 0.25 \cdot (x^2 - 2)$$

## Przykład

Znaleźć pierwiastek równania  $x^3 - x - 4.5 = 0$  w przedziale  $< 1, 2 >$  metodą iteracji prostej. Równanie  $f(x) = 0$  można sprowadzić do równania równoważnego  $x = \Phi(x)$  na kilka sposobów:

a)  $x = x^3 - 4.5$       b)  $x = \frac{4.5}{x^2 + 1}$       c)  $x = \frac{x + 4.5}{x^2}$       d)  $x = \sqrt{\frac{x + 4.5}{x}}$   
e)  $x = \sqrt[3]{x + 4.5}$

Który z nich zapewnia zbieżność metody?

# Podsumowanie

| Metoda       | Rząd zbieżności                          | Rodzaj zb. |
|--------------|------------------------------------------|------------|
| m. bisekcji  | 1                                        | globalna   |
| r. falsi     | 1                                        | globalna   |
| m. siecznych | $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.62$ | lokalna    |
| m. stycznych | 2                                        | lokalna    |
| m. Banacha   | 1                                        | lokalna    |
| m. Brenta    | 1.8                                      | globalna   |

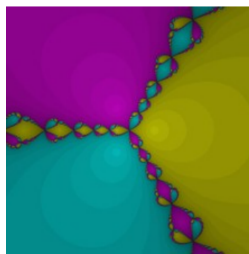
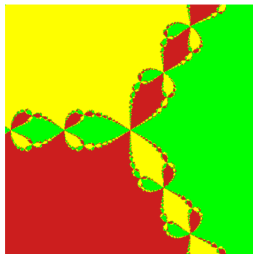
# Tematy pominięte i zaawansowane

- metoda Brenta (Brenta-Dekker) – metoda hybrydowa = m. bisekcji + m. siecznych (z interpolacją kwadratową zamiast liniowej) → funkcja fzero (Octave/Matlab)
- rozwiązywanie układów równań nieliniowych → uogólniona metoda iteracji prostej, uogólniona metoda stycznych
- znajdowanie pierwiastków wielokrotnych –
  - krotności nieparzyste ( $f(a)f(b) < 0 \rightarrow$  możliwość zastosowania dow. met., obniżenie rzędu met. Newtona i siecznych)
  - krotności parzyste  $\rightarrow$  m. Newtona (o ile istnieje lewo- lub prawostronne sąsiedztwo szukanego pierwiastka dla którego  $\text{sgn}(f') = \text{const}$ ,  $\text{sgn}(f'') = \text{const}$ )  $\rightarrow$  obniżenie rzędu metody
- pierwiastki wielomianów:
  - schemat Hornera
  - metoda Bairstowa
  - metoda Laguerre'a



# Fraktale Newtona

$$z^n - 1 = 0$$



$$z^3 - 1 = 0$$

$$z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \vee z = 1 \vee z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

## Bibliografia:

[0] Rysunek tytułowy: <http://karlchenofhell.org/kram.php?part=newton>

Dziękuję za uwagę

## Appendix

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0, \quad \sqrt{3} = 1.732050807568877$$

Metoda bisekcji

| $n$ | $x_n$     | $f(x_n)$   | $ x_n - x^* $ |
|-----|-----------|------------|---------------|
| 1   | 1.5000000 | -1.8750000 | 0.2320508     |
| 2   | 1.7500000 | 0.1718750  | 0.0179492     |
| 3   | 1.6250000 | -0.9433594 | 0.1070508     |
| 4   | 1.6875000 | -0.4094238 | 0.0445508     |
| 5   | 1.7187500 | -0.1247864 | 0.0133008     |
| 6   | 1.7343750 | 0.0220299  | 0.0023242     |
| 7   | 1.7265625 | -0.0517554 | 0.0054883     |
| 8   | 1.7304688 | -0.0149572 | 0.0015821     |
| 9   | 1.7324219 | 0.0035127  | 0.0003711     |
| 10  | 1.7314453 | -0.0057282 | 0.0006055     |
| 11  | 1.7319336 | -0.0011092 | 0.0001172     |
| 12  | 1.7321777 | 0.0012013  | 0.0001269     |
| 13  | 1.7320557 | 0.0000460  | 0.0000049     |
| 14  | 1.7319946 | -0.0005317 | 0.0000562     |
| 15  | 1.7320251 | -0.0002429 | 0.0000257     |
| 16  | 1.7320404 | -0.0000984 | 0.0000104     |
| 17  | 1.7320480 | -0.0000262 | 0.0000028     |
| 18  | 1.7320518 | 0.0000099  | 0.0000010     |

Metoda siecznych

| $n$ | $x_n$     | $f(x_n)$   | $ x_n - x^* $ |
|-----|-----------|------------|---------------|
| 1   | 1.5714286 | -0.0000010 | 0.1606222     |
| 2   | 1.7054108 | -1.3644315 | 0.0266400     |
| 3   | 1.7351358 | -0.2477451 | 0.0030850     |
| 4   | 1.7319964 | 0.0292554  | 0.0000544     |
| 5   | 1.7320507 | -0.0005152 | 0.0000001     |

Regula falsi

| $n$ | $x_n$     | $f(x_n)$   | $ x_n - x^* $ |
|-----|-----------|------------|---------------|
| 1   | 1.5714286 | -0.0000035 | 0.0000004     |
| 2   | 1.7054108 | -1.3644315 | 0.1606222     |
| 3   | 1.7278827 | -0.2477451 | 0.0266400     |
| 4   | 1.7314049 | -0.0393396 | 0.0041681     |
| 5   | 1.7319509 | -0.0061107 | 0.0006459     |
| 6   | 1.7320353 | -0.0009459 | 0.0001000     |
| 7   | 1.7320484 | -0.0001463 | 0.0000155     |
| 8   | 1.7320504 | -0.0000226 | 0.0000024     |

Metoda stycznych

| $n$ | $x_n$     | $f(x_n)$   | $ x_n - x^* $ |
|-----|-----------|------------|---------------|
| 0   | 1.0000000 | -4.0000000 | 0.7320508     |
| 1   | 3.0000000 | 24.0000000 | 1.2679492     |
| 2   | 2.2000000 | 5.8880000  | 0.4679492     |
| 3   | 1.8301508 | 0.9890012  | 0.0980999     |
| 4   | 1.7377955 | 0.0545726  | 0.0057446     |
| 5   | 1.7320723 | 0.0002033  | 0.0000215     |
| 6   | 1.7320508 | 0.0000000  | 0.0000000     |