

Metody numeryczne

Szeregi Taylora

Zadanie:

Znaleźć funkcję "podobną" do danej funkcji $f(x)$ "w pobliżu" pewnego punktu a .

Zadanie:

Znaleźć funkcję "podobną" do danej funkcji $f(x)$ "w pobliżu" pewnego punktu a .

Założenie:

Niech funkcja "podobna" (przybliżająca, aproksymująca) będzie wielomianem (stopnia n) $W_n(x)$.

$$W_n(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_2 x^2 + p_1 x + p_0$$

$$n = 0$$

$$n = 0$$

$$W_0(x) = f(a) \tag{1}$$

$$n = 0$$

$$W_0(x) = f(a) \tag{1}$$

$$n = 1$$

$$W_1(x) = p_1x + p_0$$

$$n = 0$$

$$W_0(x) = f(a) \tag{1}$$

$$n = 1$$

$$W_1(x) = p_1x + p_0$$

$$\begin{aligned} W_1(a) &= f(a) \\ W_1'(a) &= f'(a) \end{aligned} \tag{2}$$

$$n = 0$$

$$W_0(x) = f(a) \tag{1}$$

$$n = 1$$

$$W_1(x) = p_1x + p_0$$

$$\begin{aligned} W_1(a) &= f(a) \\ W_1'(a) &= f'(a) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} p_1a + p_0 &= f(a) \\ p_1 &= f'(a) \end{aligned} \tag{3}$$

$$n = 0$$

$$W_0(x) = f(a) \quad (1)$$

$$n = 1$$

$$W_1(x) = p_1x + p_0$$

$$\begin{aligned} W_1(a) &= f(a) \\ W_1'(a) &= f'(a) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} p_1a + p_0 &= f(a) \\ p_1 &= f'(a) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} p_1 &= f'(a) \\ p_0 &= f(a) - f'(a)a \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Downarrow$$

$$W_1(x) = p_1x + p_0 = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (5)$$

$$n = 2$$

$$W_2(x) = p_2x^2 + p_1x + p_0$$

$$n = 2$$

$$W_2(x) = p_2x^2 + p_1x + p_0$$

$$W_2(a) = f(a)$$

$$W_2'(a) = f'(a)$$

$$W_2''(a) = f''(a)$$

(6)

$$W_2(x) = p_2x^2 + p_1x + p_0$$

$$\begin{aligned} W_2(a) &= f(a) \\ W_2'(a) &= f'(a) \\ W_2''(a) &= f''(a) \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{array}{rclcl} p_2 a^2 & + & p_1 a & + & p_0 & = & f(a) \\ 2p_2 a & + & p_1 & & & = & f'(a) \\ 2p_2 & & & & & = & f''(a) \end{array} \quad (7)$$

$$n = 2$$

$$W_2(x) = p_2x^2 + p_1x + p_0$$

$$\begin{aligned} W_2(a) &= f(a) \\ W_2'(a) &= f'(a) \\ W_2''(a) &= f''(a) \end{aligned} \tag{6}$$

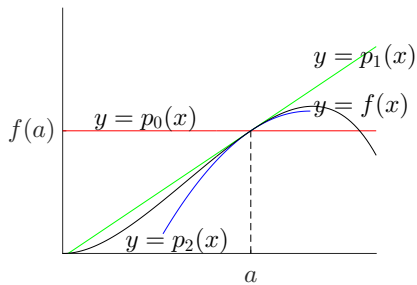
$$\begin{aligned} p_2a^2 + p_1a + p_0 &= f(a) \\ 2p_2a + p_1 &= f'(a) \\ 2p_2 &= f''(a) \end{aligned} \tag{7}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{2}f''(a) \\ p_1 &= f'(a) - f''(a)a \\ p_0 &= f(a) - (f'(a) - f''(a)a)a - \frac{1}{2}f''(a)a^2 = \\ &= f(a) - a \cdot f'(a) + \frac{1}{2}f''(a)a^2 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\Downarrow$$

$$W_2(x) = p_2x^2 + p_1x + p_0 = \dots \tag{9}$$



$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(a) & = & W(a) \\ f^{(1)}(a) & = & W^{(1)}(a) \\ f^{(2)}(a) & = & W^{(2)}(a) \\ f^{(3)}(a) & = & W^{(3)}(a) \\ \vdots & & \\ f^{(n)}(a) & = & W^{(n)}(a) \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(a) & = & p_0 + p_1 a + p_2 a^2 + p_3 a^3 + \dots + p_n a^n \\ f^{(1)}(a) & = & p_1 + 2p_2 a + 3p_3 a^2 + \dots + n p_n a^{n-1} \\ f^{(2)}(a) & = & 2p_2 + 6p_3 a + \dots + n(n-1)p_n a^{n-2} \\ f^{(3)}(a) & = & 6p_3 + \dots + n(n-1)(n-2)p_n a^{n-3} \\ \vdots & & \\ f^{(n)}(a) & = & n! p_n \end{array} \right. \quad (11)$$

$$p_m = \sum_{k=m}^n \frac{(-a)^{k-m}}{(k-m)!m!} f^{(k)}(a) \quad (12)$$

$$f(x) = W(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \quad (13)$$

Twierdzenie

Niech Y będzie przestrzenią unormowaną oraz $f: [a, b] \rightarrow Y$ będzie funkcją $(n+1)$ -razy różniczkowalną na przedziale $[a, b]$ w sposób ciągły (na końcach przedziału zakłada się różniczkowalność z lewej, bądź odpowiednio, z prawej strony). Wówczas dla każdego punktu x z przedziału (a, b) spełniony jest wzór zwany wzorem Taylora

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{x-a}{1!} f^{(1)}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x, a) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) + R_n(x, a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie $f^{(k)}(a)$ jest pochodną k -tego rzędu funkcji f , obliczoną w punkcie a , $R_n(x, a)$ spełnia warunek

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x, a)}{(x-a)^n} = 0$$



Brook Taylor (1685-1731)

Funkcja $R_n(x, a)$ nazywana jest resztą Peana we wzorze Taylora. W przypadku $a = 0$, wzór Taylora nazywany jest wzorem Maclaurina.

Reszty we wzorze Taylora

- reszta w postaci Lagrange'a

$$\forall \xi \in [a, x] \text{ dla } x > a \vee \xi \in [x, a] \text{ dla } x < a$$

$$R_n(x, a) = \frac{(x - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

- reszta w postaci Cauchy'ego
- reszta w postaci całkowej
- reszta w postaci Schlömilcha-Roche'a

Przykład

Dla danej funkcji $f(x) = \sin(x)$:

- a) znaleźć wielomiany Taylora stopnia zero, pierwszego, drugiego, trzeciego i piątego*
- b) wykorzystując Octave wyznaczyć z jakim błędem każdy z powyższych wielomianów przybliży wyrażenie $\sin(35^\circ)$*
- c) wyznaczyć ogólny wzór rozwinięcia $\sin(x)$ w szereg Taylora*
- d) wyznaczyć szerokość przedziału $[-d, d] = |x| < d$ wokół $x = 0$ na którym $W_5(x)$ może zostać użyty do aproksymacji $f(x)$ z błędem $\epsilon \leq 0.2$. Jaka będzie szerokość przedziału jeśli założymy błąd np. 0.01?*

ROZWIĄZANIE

- a) Na podstawie (13) można zauważyć, że każdy wielomian Taylora można uzyskać z wielomianu Taylora wyższego stopnia poprzez obcięcie składowych wyższych rzędów. Ponieważ $a = 0 \rightarrow$ wzór Maclaurina:

$$\begin{aligned}
 W_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(x)^k}{k!} f^{(k)}(0) \\
 &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Kolejne pochodne $\sin(x)$ oraz ich wartości dla $x = 0$ wynoszą odpowiednio:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\sin(x)$	0
1	$\cos(x)$	1
2	$-\sin(x)$	0
3	$-\cos(x)$	-1
4	$\sin(x)$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Można zauważyć, że w kolejnych wierszach schemat będzie się powtarzał, w związku z czym zadane wielomiany będą wynosić:

$$p_0(x) = 0,$$

$$p_1(x) = x,$$

$$p_2(x) = x,$$

$$p_3(x) = x - \frac{1}{3!}x^3,$$

...

$$p_5(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$$

$$p_0(x) = 0,$$

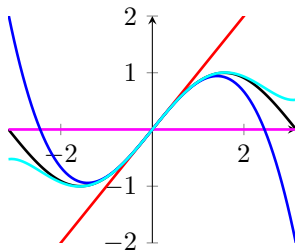
$$p_1(x) = x,$$

$$p_2(x) = x,$$

$$p_3(x) = x - \frac{1}{3!}x^3,$$

...

$$p_5(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$$

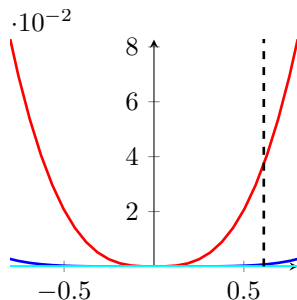
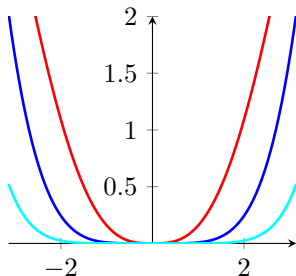


- b) wykorzystując Octave wyznaczyć z jakim błędem każdy z powyższych wielomianów przybliży wyrażenie $\sin(35^\circ)$

$$|p_1(35^\circ) - \sin(35^\circ)| = |x - \sin(x)|_{|x=35^\circ} = 0.037289$$

$$|p_3(35^\circ) - \sin(35^\circ)| = |x - \frac{1}{6}x^3 - \sin(x)|_{|x=35^\circ} = 7.0257e-04$$

$$|p_5(35^\circ) - \sin(35^\circ)| = |x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \sin(x)|_{|x=35^\circ} = 6.2652e-06$$



c) wyznaczyć ogólny wzór rozwinięcia $\sin(x)$ w szereg Taylora

$$\begin{aligned}
 W_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(x)^k}{k!} f^{(k)}(0) \\
 &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n \\
 &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots
 \end{aligned} \tag{16}$$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\sin(x)$	0
1	$\cos(x)$	1
2	$-\sin(x)$	0
3	$-\cos(x)$	-1
4	$\sin(x)$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$p_0(x) = 0,$$

$$p_1(x) = x,$$

$$p_2(x) = x,$$

$$p_3(x) = x - \frac{1}{3!}x^3,$$

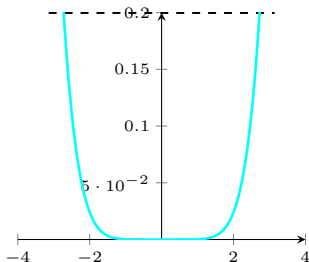
$$\dots$$

$$p_5(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$$

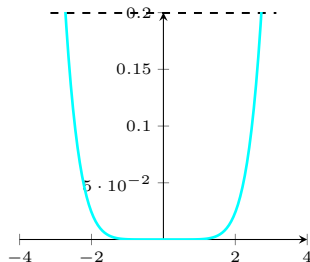
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

- d) wyznacz szerokość przedziału $[-d, d] = |x| < d$ wokół $x = 0$ na którym $W_5(x)$ może zostać użyty do aproksymacji $f(x)$ z błędem $\epsilon \leq 0.2$. Jaka będzie szerokość przedziału jeśli założymy błąd np. 0.01?

Podejście 1):
("na oko")



$$a \approx 2.7$$



$$a \approx 1.7$$

- d) wyznaczyć szerokość przedziału $[-d, d] = |x| < d$ wokół $x = 0$ na którym $W_5(x)$ może zostać użyty do aproksymacji $f(x)$ z błędem $\epsilon \leq 0.2$. Jaka będzie szerokość przedziału jeśli założymy błąd np. 0.01?

Podejście 2):

(wykorzystanie reszty w postaci Lagrange'a)

$$\bigvee_{\xi \in [a, x]} \text{ dla } x > a \vee \xi \in [x, a] \text{ dla } x < a$$

$$R_n(x, a) = \frac{(x - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

a) $a = 0$

b) $R_n(x, 0) = 0.2$

c) $f(x) = \sin(x) \rightarrow \wedge_{n \in N} |f^{(n+1)}| \leq 1$

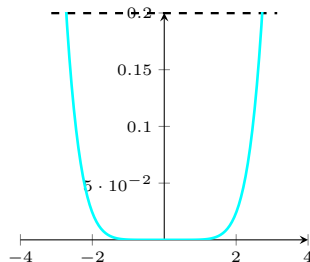
d) $R_n(x, 0) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

e) $r_n(x) = \frac{x^{5+1}}{(5+1)!}$

f) $\frac{x^6}{6!} = 0.2 \rightarrow x^6 - 144 = 0$

jak to rozwiązać?

$$x \approx 2.28$$



$$|p_5(x) - \sin(x)|$$

$$|r_n(x)|$$

Rozwinięcia przykładowych funkcji w szereg Maclaurina

$$\sqrt{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 4^n} x^n, \quad |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\frac{x^m}{1-x} = \sum_{n=m}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad |x| < 1, \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\text{gdzie } \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$

gdzie $|x| < \frac{\pi}{2}$, B_n to liczby Bernoulliego.

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}, \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad |x| < 1$$

Przykład

Jakiego stopnia wielomianu Taylora należy użyć, aby przybliżyć wartość $e^{0.7}$ z błędem mniejszym niż $\epsilon = 0.0001$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$$

$$f(x) = e^x \rightarrow f^{(k)}(x) = e^x \rightarrow f^{(k)}(0) = e^0 = 1$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) < \epsilon$$

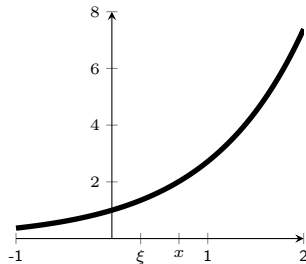
$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi} < \epsilon$$

$$\max_{\xi \in [0, x]} (e^{\xi}) = e^x = e^{0.7} < e^1 \approx 2.71 < 3$$

$$\frac{0.7^{n+1}}{(n+1)!} 3 < 10^{-4}$$

```
>> n=1;
>> while 3*(0.7)^(n+1)/factorial(n+1) >= 0.0001
n=n+1;
end
```

$n = 6$



Zastosowanie sz. Taylora

Przykład

Znaleźć rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji $x \sin x^2$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\begin{aligned} x \sin x^2 &= x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x^2)^{2n+1} \right) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+3} = x^3 - \frac{x^7}{3!} + \frac{x^{11}}{5!} - \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Dziękuję za uwagę