Metody numeryczne
Laboratorium 6
Różniczkowanie i rozwiązywanie równań różniczkowych

1 Pochodna

Przybliżoną wartość pochodnej można obliczyć przez obliczenie różnic pomiędzy wartościami tych samych współrzędnych sąsiadujących punktów funkcji zadanej numerycznie. Korzysta się tu z definicji pochodnej funkcji:

$$y = y(x)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{x_{i+1} \to x_i} \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \lim_{x_{i+1} \to x_i} \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \quad (1)$$

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i$$

Założenie:
Bierzemy Δx „wystarczająco" małe, wtedy iloraz różnicowy

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (2)$$

jest przybliżeniem pochodnej funkcji $y(x)$.

Druga i trzecia pochodna:

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(dy)}{(dx)^2}$$

$$y''_i = \frac{y'_{i+1} - y'_i}{(x_{i+1} - x_i)^2} \quad (3)$$

$$y''' = \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d(d(dy))}{(dx)^3}$$

$$y'''_i = \frac{y''_{i+1} - y''_i}{(x_{i+1} - x_i)^3} \quad (4)$$

Do wykonania tej operacji wykorzystuje się funkcję `diff()`, która oblicza różnice pomiędzy sąsiadującymi elementami wektora.

Przykład:
```
>> dxdy=diff(y)./diff(x) %y jest wektorem z wartościami funkcji
w punktach x
```

Zadanie:

1. Napisz program main6.m, w którym oblicz 1,2 i 3 pochodną funkcji $y = x^3$ w przedziale $< -2, 2 >$. Wykorzystaj funkcję `diff`.
2. Wyniki przedstaw graficznie.

2 Równania różniczkowe

Metoda Eulera - metoda rozwiązywania równań różniczkowych, opierająca się na interpretacji geometrycznej równania różniczkowego.

Zakładamy, że mamy dane równanie różniczkowe 1 rzędu

$$y' = f(x, y) \tag{5}$$

gdzie: $y = y(x)$
x - zmienna niezależna,
z warunkiem początkowym
$y_0 = y(x_0)$

$$y' = f \rightarrow y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)) \rightarrow y'_i = f_i \tag{6}$$

Korzystając ze wzoru 2:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = f_i \tag{7}$$

dla małych przyrostów zmiennej x

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i, \Delta x \approx 0 \tag{8}$$

Przekształcając otrzymujemy wzór iteracyjny:

$$y_{i+1} = f_i \cdot \Delta x + y_i \tag{9}$$

Zadanie:

1. W pliky dy_dx.m zdefiniuj funkcję

$$\frac{dy}{dx} = -y^2$$

2. Uzupełnij plik f_mEulera.m na podstawie wskazówek wewnątrz pliku.

3. Napisz program main7.m, w którym:

   - zdefiniuj przedział, w którym będziemy poszukiwać rozwiązania $x \in< 0, 1 >$
   - krok = 0.1
   - warunek początkowy $y_0 = 1$
   - wywołaj funkcję reprezentującą metodę Eulera z pliku f_mEulera z parametrami: funkcja $\frac{dy}{dx}, x, y_0$
   - narysuj rozwiązanie równania w przedziale $x \in< 0, 1 >$ przy pomocy metody Eulera (linia czerwona) oraz rozwiązanie ścisłe (linia zielona)

     Rozwiązanie ścisłe ma postać

     $$y(x) = \frac{1}{1 + x}$$

4. Porównaj wyniki dla różnych wartości kroku; 0.01, 0.1, 0.5.