

- 1 Podstawy rozwiązywania równań różniczkowych
- 2 Zastosowanie metod
- 3 Użyteczne przykłady
- 4 Przykłady sformułowań wariacyjnych
- 5 Przykłady obliczeń ręcznych
- 6 Obliczenia przy pomocy elementów skończonych
- 7 Sformułowanie wariacyjne dla problemów 2D i 3D

MNK, metoda Galerkina i metoda kolokacji do rozwiązywania równań różniczkowych

Cel: rozwinięcie idei aproksymacji f przez u , czyli rozwiązywania problemu:

$$u = f$$

na rozwiązywanie RRCz, np:

$$-u'' + bu = f, \quad u(0) = C, \quad u'(L) = D$$

Szczególny nacisk położony na metodę Galerkina.

$$\mathcal{L}(u) = 0, \quad x \in \Omega$$

Przykłady (dla zagadnień 1D):

$$\mathcal{L}(u) = \frac{d^2 u}{dx^2} - f(x),$$

$$\mathcal{L}(u) = \frac{d}{dx} \left(\alpha(x) \frac{du}{dx} \right) + f(x),$$

$$\mathcal{L}(u) = \frac{d}{dx} \left(\alpha(u) \frac{du}{dx} \right) - au + f(x),$$

$$\mathcal{L}(u) = \frac{d}{dx} \left(\alpha(u) \frac{du}{dx} \right) + f(u, x)$$

Ogólna postać warunków brzegowych

$$\mathcal{B}_0(u) = 0, \quad x = 0, \quad \mathcal{B}_1(u) = 0, \quad x = L$$

Przykłady:

$$\mathcal{B}_i(u) = u - g, \quad \text{warunek Dirichleta}$$

$$\mathcal{B}_i(u) = -\alpha \frac{du}{dx} - g, \quad \text{warunek Neumanna}$$

$$\mathcal{B}_i(u) = -\alpha \frac{du}{dx} - h(u - g), \quad \text{warunek Robina}$$

- $u_e(x)$ – rozwiązanie ścisłe (*exact solution*) równania $\mathcal{L}(u_e) = 0 + \mathcal{B}_i = 0$
- $u(x)$ – rozwiązanie przybliżone
- $V = \text{span}\{\psi_0(x), \dots, \psi_N(x)\}$ –przestrzeń V o bazie $\{\psi_i\}_{i \in \mathcal{I}_s}$
- Poszukiwane: $u \in V$
- $\mathcal{I}_s = \{0, \dots, N\}$ zbiór indeksów
- $u(x) = \sum_{j \in \mathcal{I}_s} c_j \psi_j(x)$
- Iloczyn skalarny: $(u, v) = \int_{\Omega} uv \, dx$
- Norma: $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$

Nowe zagadnienia:

- Sformułowanie wariacyjne równania różniczkowego
- Obchodzenie się z warunkami brzegowymi

Metoda reszduów

- Rozwiązując $u = f$ znany jest błąd $e = f - u$ oraz zasady jego minimalizacji
- Rozwiązując $\mathcal{L}(u_e) = f$ nie znamy u_e przez co niemożliwe jest oszacowanie błędu $e = u_e - u$
- Możliwe jest tylko oszacowanie *błędu (nie)spełnienia równania*: residuum R

Wstawiając $u = \sum_j c_j \psi_j$ w $\mathcal{L} = f$ otrzymuje się residuum R .

($\mathcal{L}(u_e) - f = 0$, ale $\mathcal{L}(u) - f \neq 0 = R$)

$$\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}\left(\sum_j c_j \psi_j\right) = R \neq 0$$

Cel: minimalizacja R w funkcji $\{c_i\}_{i \in \mathcal{I}_s}$ (mamy nadzieję, że w ten sposób e również będzie mały)

$$R = R(c_0, \dots, c_N; x)$$

Pomysł: minimalizacja

$$E = \|R\|^2 = (R, R) = \int_{\Omega} R^2 dx$$

Jeśli minimalizujemy względem $\{c_i\}_{i \in \mathcal{I}_s}$ to:

$$\frac{\partial E}{\partial c_i} = \int_{\Omega} 2R \frac{\partial R}{\partial c_i} dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (R, \frac{\partial R}{\partial c_i}) = 0, \quad i \in \mathcal{I}_s$$

$N + 1$ równań i $N + 1$ niewiadomych $\{c_i\}_{i \in \mathcal{I}_s}$

Pomysł: niech R będzie ortogonalne do V ,

$$(R, v) = 0, \quad \forall v \in V$$

co jest równoważne

$$(R, \psi_i) = 0, \quad i \in \mathcal{I}_s$$

$N + 1$ równań i $N + 1$ niewiadomych $\{c_i\}_{i \in \mathcal{I}_s}$

- uogólnienie metody Galerkina: niech R będzie ortogonalne do pewnej przestrzeni W , przy czym możliwe jest $W \neq V$:

$$(R, v) = 0, \quad \forall v \in W$$

Jeśli $\{w_0, \dots, w_N\}$ to baza dla W :

$$(R, w_i) = 0, \quad i \in \mathcal{I}_s$$

- $N + 1$ równań i $N + 1$ niewiadomych $\{c_i\}_{i \in \mathcal{I}_s}$
- Metoda residuów z wagą $w_i = \partial R / \partial c_i$ daje MNK

Nowe pojęcia: funkcje testowe i próbne (test functions/trial functions)

- ψ_j wykorzystywany w $\sum_j c_j \psi_j$ - *funkcja próbna* (f. bazowa)
- ψ_i lub w_i wykorzystywana jako waga w metodzie Galerkinia to *funkcja testowa* (f. wagowa)

Metoda kolokacji

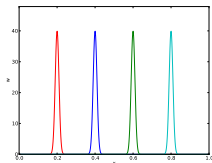
Pomysł: Niech $R = 0$ w $N + 1$ punktach obszaru

$$R(x_i; c_0, \dots, c_N) = 0, \quad i \in \mathcal{I}_s$$

Metoda kolokacji to metoda residuów ważonych gdzie wagi to delty Diraca

$$0 = \int_{\Omega} R(x; c_0, \dots, c_N) \delta(x - x_i) dx = R(x_i; c_0, \dots, c_N)$$

własność $\delta(x)$:
$$\int_{\Omega} f(x) \delta(x - x_i) dx = f(x_i), \quad x_i \in \Omega$$



- 1 Podstawy rozwiązywania równań różniczkowych
- 2 Zastosowanie metod**
- 3 Użyteczne przykłady
- 4 Przykłady sformułowań wariacyjnych
- 5 Przykłady obliczeń ręcznych
- 6 Obliczenia przy pomocy elementów skończonych
- 7 Sformułowanie wariacyjne dla problemów 2D i 3D

Cel:

Podanie przykładów zastosowania metod: najmniejszych kwadratów, Galerkina, kolokacji; do rozwiązywania zagadnień 1D z globalnymi funkcjami bazowymi.

Przykładowy problem

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in \Omega = [0, L], \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 0$$

Funkcje bazowe:

$$\psi_i(x) = \sin\left((i+1)\pi\frac{x}{L}\right), \quad i \in \mathcal{I}_s$$

Residuum:

$$\begin{aligned} R(x; c_0, \dots, c_N) &= u''(x) + f(x), \\ &= \frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{j \in \mathcal{I}_s} c_j \psi_j(x) \right) + f(x), \\ &= - \sum_{j \in \mathcal{I}_s} c_j \psi_j''(x) + f(x) \end{aligned}$$

Ponieważ $u(0) = u(L) = 0$, należy zapewnić, aby dla wszystkich f-cji bazowych $\psi_i(0) = \psi_i(L) = 0$. Jeśli tak to:

$$u(0) = \sum_j c_j \psi_j(0) = 0, \quad u(L) = \sum_j c_j \psi_j(L) = 0$$

- znane u : warunek brzegowy Dirichleta
- znane u' : warunek brzegowy Neumanna
- potrzebne $\psi_i = 0$ spełniające warunek brzegowy Dirichleta

$$\left(R, \frac{\partial R}{\partial c_i}\right) = 0, \quad i \in \mathcal{I}_s$$

$$\frac{\partial R}{\partial c_i} = \frac{\partial}{\partial c_i} \left(\sum_{j \in \mathcal{I}_s} c_j \psi_j''(x) + f(x) \right) = \psi_i''(x)$$

Ponieważ:

$$\frac{\partial}{\partial c_i} (c_0 \psi_0'' + c_1 \psi_1'' + \dots + c_{i-1} \psi_{i-1}'' + c_i \psi_i'' + c_{i+1} \psi_{i+1}'' + \dots + c_N \psi_N'') = \psi_i''$$

$$\left(\sum_j c_j \psi_j'' + f, \psi_i''\right) = 0, \quad i \in \mathcal{I}_s$$

Niewiadome na lewo, dane na prawo:

$$\sum_{j \in \mathcal{I}_s} (\psi_i'', \psi_j'') c_j = -(f, \psi_i''), \quad i \in \mathcal{I}_s$$

Co jest równoważne URL:

$$\sum_{j \in \mathcal{I}_s} A_{i,j} c_j = b_i, \quad i \in \mathcal{I}_s$$

Metoda najmniejszych kwadratów; macierz współczynników i wektor prawej strony

$$\begin{aligned}A_{i,j} &= (\psi_i'', \psi_j'') \\&= \pi^4 (i+1)^2 (j+1)^2 L^{-4} \int_0^L \sin\left((i+1)\pi \frac{x}{L}\right) \sin\left((j+1)\pi \frac{x}{L}\right) dx \\&= \begin{cases} \frac{1}{2} L^{-3} \pi^4 (i+1)^4 & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \\b_i &= -(f, \psi_i'') = (i+1)^2 \pi^2 L^{-2} \int_0^L f(x) \sin\left((i+1)\pi \frac{x}{L}\right) dx\end{aligned}$$

Macierz diagonalna jako wynik ortogonalności funkcji bazowych

Ortogonalność – użyteczna własność funkcji bazowych

$$\int_0^L \sin\left((i+1)\pi\frac{x}{L}\right) \sin\left((j+1)\pi\frac{x}{L}\right) dx = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}L & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$\Rightarrow (\psi_i'', \psi_j'') = \delta_{ij}$, a więc wyłącznie elementy na przekątnej $\neq 0$, dzięki czemu z łatwością można znaleźć rozwiązanie:

$$c_i = \frac{2L}{\pi^2(i+1)^2} \int_0^L f(x) \sin\left((i+1)\pi\frac{x}{L}\right) dx$$

Metoda najmniejszych kwadratów; rozwiązanie

Rozwiązanie przy pomocy sympy dla $f(x) = 2$:

```
from sympy import *
import sys

i, j = symbols('i j', integer=True)
x, L = symbols('x L')
f = 2
a = 2*L/(pi**2*(i+1)**2)
c_i = a*integrate(f*sin((i+1)*pi*x/L), (x, 0, L))
c_i = simplify(c_i)
print c_i
```

$$c_i = 4 \frac{L^2 \left((-1)^i + 1 \right)}{\pi^3 (i^3 + 3i^2 + 3i + 1)}, \quad u(x) = \sum_{k=0}^{N/2} \frac{8L^2}{\pi^3 (2k+1)^3} \sin \left((2k+1)\pi \frac{x}{L} \right)$$

c_i szybko zanikają: $c_2 = c_0/27$, $c_4 = c_0/125$ - pierwszy wyraz może być całkiem niezłym przybliżeniem:

$$u(x) \approx \frac{8L^2}{\pi^3} \sin \left(\pi \frac{x}{L} \right)$$

$$R = u'' + f:$$

$$(u'' + f, v) = 0, \quad \forall v \in V,$$

po reorganizacji:

$$(u'', v) = -(f, v), \quad \forall v \in V$$

co jest *sformułowaniem wariacyjnym* zagadnienia opisanego RRCz

$\forall v \in V$ jest równoważne $\forall v \in \psi_i, i \in \mathcal{I}_s$, i ostatecznie

$$\left(\sum_{j \in \mathcal{I}_s} c_j \psi_j'', \psi_i \right) = -(f, \psi_i), \quad i \in \mathcal{I}_s$$

$$\sum_{j \in \mathcal{I}_s} (\psi_j'', \psi_i) c_j = -(f, \psi_i), \quad i \in \mathcal{I}_s$$

Ponieważ $\psi_i'' \propto -\psi_i$, metoda Galerkinga daje ten sam URL i to samo rozwiązanie (w tym konkretnym przykładzie) co metoda najmniejszych kwadratów.

$R = 0$ (czyli równanie różniczkowe) musi być spełnione w $N + 1$ punktach:

$$-\sum_{j \in \mathcal{I}_s} c_j \psi_j''(x_i) = f(x_i), \quad i \in \mathcal{I}_s$$

To daje URL $\sum_j A_{i,j} = b_i$ o współczynnikach:

$$A_{i,j} = -\psi_j''(x_i) = (j+1)^2 \pi^2 L^{-2} \sin\left((j+1)\pi \frac{x_i}{L}\right), \quad b_i = 2$$

Niech: $N = 0$, $x_0 = L/2$, wtedy

$$c_0 = 2L^2/\pi^2$$

Porównanie metod

- Rozwiązanie ścisłe: $u(x) = x(L - x)$
- m. Galerkina oraz MNK ($N = 0$): $u(x) = 8L^2\pi^{-3} \sin(\pi x/L)$
- m. kolokacji ($N = 0$): $u(x) = 2L^2\pi^{-2} \sin(\pi x/L)$.

```
>>> import sympy as sym
>>> # Computing with Dirichlet conditions: -u''=2 and sines
>>> x, L = sym.symbols('x L')
>>> e_Galerkin = x*(L-x) - 8*L**2*sym.pi**(-3)*sym.sin(sym.pi*x/L)
>>> e_colloc = x*(L-x) - 2*L**2*sym.pi**(-2)*sym.sin(sym.pi*x/L)

>>> # Verify max error for x=L/2
>>> dedx_Galerkin = sym.diff(e_Galerkin, x)
>>> dedx_Galerkin.subs(x, L/2)
0
>>> dedx_colloc = sym.diff(e_colloc, x)
>>> dedx_colloc.subs(x, L/2)
0

# Compute max error: x=L/2, evaluate numerical, and simplify
>>> sym.simplify(e_Galerkin.subs(x, L/2).evalf(n=3))
-0.00812*L**2
>>> sym.simplify(e_colloc.subs(x, L/2).evalf(n=3))
0.0473*L**2
```

- 1 Podstawy rozwiązywania równań różniczkowych
- 2 Zastosowanie metod
- 3 Użyteczne przykłady**
- 4 Przykłady sformułowań wariacyjnych
- 5 Przykłady obliczeń ręcznych
- 6 Obliczenia przy pomocy elementów skończonych
- 7 Sformułowanie wariacyjne dla problemów 2D i 3D

Zalety całkowania przez części

Od tej pory rozwiązanie równania różniczkowego będzie uzyskiwane poprzez sformułowanie słabe otrzymywane w wyniku całkowania przez części (zastosowanie tw. Greena)

$$\begin{aligned}\int_0^L u''(x)v(x)dx &= - \int_0^L u'(x)v'(x)dx + [vu']_0^L \\ &= - \int_0^L u'(x)v'(x)dx + u'(L)v(L) - u'(0)v(0)\end{aligned}$$

Dlaczego?

- Obniżenie wymagań co do różniczkowości
- Pozwala uzyskać symetryczne postaci operatorów (m.in. macierzy)
- Ułatwia implementacje warunków brzegowych Neumanna
- Standardowe funkcje bazowe na elementach skończonych φ_i mają nieciągłe pochodne na krańcach elementów przez co niemożliwe jest obliczenie dla nich φ_i''

Sposób postępowania z niezerowym warunkiem Dirichleta

- Niech będzie dany niezerowy warunek Dirichleta, np. $u(L) = D$
- Żądamy $\psi_i(L) = 0$ (czyli $\psi_i = 0$ w punkcie występowania warunku Dirichleta)
- Problem: $u(L) = \sum_j c_j \psi_j(L) = \sum_j c_j \cdot 0 = 0 \neq D$ - zawsze!
- Rozwiązanie: $u(x) = B(x) + \sum_j c_j \psi_j(x)$
- $B(x)$: funkcja brzegowa spełniająca warunek Dirichleta
- Jeśli $u(L) = D$, należy dopilnować, aby $B(L) = D$
- Brak wymagań co do zachowania $B(x)$ wewnątrz Ω

Przykład stworzenia funkcji bazowej dla warunku Dirichleta z lewej i prawej strony przedziału

Warunki Dirichleta: $u(0) = C$ and $u(L) = D$. Niech $B(x)$ będzie np.

$$B(x) = \frac{1}{L}(C(L-x) + Dx) : \quad B(0) = C, \quad B(L) = D$$

$$u(x) = B(x) + \sum_{j \in \mathcal{I}_s} c_j \psi_j(x),$$

$$u(0) = B(0) = C, \quad u(L) = B(L) = D$$

Przykład stworzenia funkcji bazowej dla jednostronnego warunku Dirichleta

Warunek Dirichleta: $u(L) = D$. Niech $B(x)$ będzie równe:

$$B(x) = D : \quad B(L) = D$$

$$u(x) = B(x) + \sum_{j \in \mathcal{I}_s} c_j \psi_j(x),$$

$$u(L) = B(L) = D$$

Uwzględniając $B(x)$, $u \notin V$, ale $\sum_j c_j \psi_j \in V$

- $\{\psi_i\}_{i \in \mathcal{I}_s}$ jest bazą przestrzeni V
- $\sum_{j \in \mathcal{I}_s} c_j \psi_j(x) \in V$
- Ale $u \notin V$!
- Dowód: niech $u(0) = C$ i $u \in V$; dla każdego $v \in V$ jest $v(0) = C$, ale $2u \notin V$ ponieważ $2u(0) = 2C$ (zła wartość)
- Dla $u(x) = B(x) + \sum_{j \in \mathcal{I}_s} c_j \psi_j(x)$, (w ogólnym przypadku) $B \notin V$ oraz $u \notin V$, ale $(u - B) \in V$ ponieważ $\sum_j c_j \psi_j \in V$

Notacja stosowana dla sformułowań wariacyjnych

Znaczna część literatury dot. FEM stosuje specjalną notację jeśli chodzi o sformułowania wariacyjne

Znajdź takie $(u - B) \in V$, że

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

Przykład zastosowania notacji

$$-u'' = f, \quad u'(0) = C, \quad u(L) = D, \quad u = D + \sum_j c_j \psi_j$$

Sformułowanie wariacyjne (słabe):

$$\int_{\Omega} u'v' dx = \int_{\Omega} fvdx - v(0)C \quad \text{or} \quad (u', v') = (f, v) - v(0)C \quad \forall v \in V$$

W zaproponowanej abstrakcyjnej notacji: znajdź $(u - B) \in V$ takie, że

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

a więc

$$a(u, v) = (u', v'), \quad L(v) = (f, v) - v(0)C$$

- $a(u, v)$ jest formą dwuliniową
- $L(v)$ jest formą liniową

Dla form liniowych

$$L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2),$$

Dla form dwuliniowych

$$\begin{aligned} a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) &= \alpha_1 a(u_1, v) + \alpha_2 a(u_2, v), \\ a(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= \alpha_1 a(u, v_1) + \alpha_2 a(u, v_2) \end{aligned}$$

W zagadnieniach nieliniowych: Znaleźć $(u - B) \in V$ takie, że $F(u; v) = 0 \forall v \in V$

URL związany z równaniem wyrażonym w notacji abstrakcyjnej

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \quad \Leftrightarrow \quad a(u, \psi_i) = L(\psi_i) \quad i \in \mathcal{I}_s$$

URL odpowiadający powyższemu równaniu można otrzymać wstawiając do niego $u = B + \sum_j c_j \psi_j$:

$$a(B + \sum_{j \in \mathcal{I}_s} c_j \psi_j, \psi_i) c_j = L(\psi_i) \quad i \in \mathcal{I}_s$$

Ze względu na liniowość,

$$\sum_{j \in \mathcal{I}_s} \underbrace{a(\psi_j, \psi_i)}_{A_{i,j}} c_j = \underbrace{L(\psi_i) - a(B, \psi_i)}_{b_i} \quad i \in \mathcal{I}_s$$

Równoważność sformułowań wariacyjnych i metod energetycznych

Jeśli a jest symetryczne: $a(u, v) = a(v, u)$, wtedy

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

jest równoważne minimalizacji funkcjonału

$$F(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$$

dla wszystkich $v \in V$. Czyli

$$F(u) \leq F(v) \quad \forall v \in V$$

- Sformułowanie często stosowane w początkach rozwoju FEM
- Wciąż stosowane w zagadnieniach sprężystości i analizy dynamicznej struktur mechanicznych
- Podejście nie tak ogólne jak m. Galerkina (ze względu na wymóg symetryczności $a(u, v) = a(v, u)$)

- 1 Podstawy rozwiązywania równań różniczkowych
- 2 Zastosowanie metod
- 3 Użyteczne przykłady
- 4 Przykłady sformułowań wariacyjnych**
- 5 Przykłady obliczeń ręcznych
- 6 Obliczenia przy pomocy elementów skończonych
- 7 Sformułowanie wariacyjne dla problemów 2D i 3D

Cel

Wyprowadzić sformułowania wariacyjne dla pewnych typów równań różniczkowych w 1D uwzględniających

- zmienne współczynniki
- mieszane warunki brzegowe typu Dirichleta i Neumanna
- współczynniki nieliniowe

$$-\frac{d}{dx} \left(\alpha(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x), \quad x \in \Omega = [0, L], \quad u(0) = C, \quad u(L) = D$$

- współczynnik $\alpha(x)$ zależny od zmiennej x
- $V = \text{span}\{\psi_0, \dots, \psi_N\}$
- Niezerowy warunek Dirichleta w $x = 0$ oraz $x = L$
- Z kolei $\psi_i(0) = \psi_i(L) = 0$
- a więc dla każdego $v \in V$ będzie $v(0) = v(L) = 0$
- Rozwiązanie problemu \rightarrow niech: $B(x) = C + \frac{1}{L}(D - C)x$,
wtedy

$$u(x) = B(x) + \sum_{j \in \mathcal{I}_s} c_j \psi_j(x),$$

$$R = -\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) - f$$

co zapisane w postaci wariacyjnej:

$$(R, v) = 0, \quad \forall v \in V$$

lub jawnie:

$$\int_{\Omega} \left(-\frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{du}{dx} \right) - f \right) v \, dx = 0, \quad \forall v \in V$$

$$-\int_{\Omega} \frac{d}{dx} \left(\alpha(x) \frac{du}{dx} \right) v \, dx = \int_{\Omega} \alpha(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx - \left[\alpha \frac{du}{dx} v \right]_0^L$$

Ostatni wyraz prawej strony znika ponieważ $v(0) = v(L) = 0$

Sformułowanie wariacyjne

Znaleźć $(u - B) \in V$ takie, że

$$\int_{\Omega} \alpha(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_{\Omega} f(x) v dx, \quad \forall v \in V$$

Po zastosowaniu zwartej notacji:

$$\underbrace{(\alpha u', v')}_{a(u,v)} = \underbrace{(f, v)}_{L(v)}, \quad \forall v \in V$$

Uwzględniając

$$a(u, v) = (\alpha u', v'), \quad L(v) = (f, v)$$

można wygenerować URL gdzie:

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= a(\psi_j, \psi_i) = (\alpha \psi_j', \psi_i') = \int_{\Omega} \alpha \psi_j' \psi_i' \, dx = \int_{\Omega} \psi_i' \alpha \psi_j' \, dx = \\ &= a(\psi_i, \psi_j) = A_{j,i} \end{aligned}$$

$$b_i = (f, \psi_i) - (\alpha B', \psi_i) = \int_{\Omega} (f \psi_i - \alpha L^{-1}(D - C) \psi_i') \, dx$$

Uwzględnienie zmiennego współczynnika; pełne wyprowadzenie URL

$$v = \psi_i \text{ oraz } u = B + \sum_j c_j \psi_j:$$

$$(\alpha B' + \alpha \sum_{j \in \mathcal{I}_s} c_j \psi_j', \psi_i') = (f, \psi_i), \quad i \in \mathcal{I}_s$$

Porządkując składniki otrzymuje się

$$\sum_{j \in \mathcal{I}_s} (\alpha \psi_j', \psi_i') c_j = (f, \psi_i) + (aL^{-1}(D - C), \psi_i'), \quad i \in \mathcal{I}_s$$

czyli URL dany przez $\sum_j A_{i,j} c_j = b_i$ gdzie

$$A_{i,j} = (a \psi_j', \psi_i') = \int_{\Omega} \alpha(x) \psi_j'(x) \psi_i'(x) dx$$

$$b_i = (f, \psi_i) + (aL^{-1}(D - C), \psi_i') = \int_{\Omega} \left(f \psi_i + \alpha \frac{D - C}{L} \psi_i' \right) dx$$

Uwzględnienie funkcji pochodnej w równaniu i warunku brzegowym

$$-u''(x) + bu'(x) = f(x), \quad x \in \Omega = [0, L], \quad u(0) = C, \quad u'(L) = E$$

Nowy problem:

- pochodna pierwszego rzędu u' w równaniu
- warunek brzegowy – wymuszona wartość pochodnej rozwiązania u' : $u'(L) = E$

Jak postępować?:

- Zakładamy $\psi_i(0) = 0$ ze względu na warunek Dirichleta w $x = 0$
- Wybieramy: $B(x) = C(L - x)$ lub po prostu $B(x) = C$
- Brak wymagań co do wartości $\psi_i(L)$ (bo brak war. Dir. w $x = L$)

Uwzględnienie funkcji pochodnej w równaniu i warunku brzegowym, szczegóły

$$u = C + \sum_{j \in \mathcal{I}_s} c_j \psi_j(x)$$

Metoda Galerkina: mnożymy przez funkcję wagową v , całkujemy nad Ω , całkujemy przez części:

$$(-u'' + bu' - f, v) = 0, \quad \forall v \in V$$

$$(u', v') + (bu', v) = (f, v) + [u'v]_0^L, \quad \forall v \in V$$

$$[u'v]_0^L = u'(L)v(L) - u'(0)v(0) = Ev(L) \text{ ponieważ } v(0) = 0 \text{ a } u'(L) = E$$

$$(u', v') + (bu', v) = (f, v) + Ev(L), \quad \forall v \in V$$

Uwzględnienie funkcji pochodnej w równaniu i warunku brzegowym, spostrzeżenia

$$(u', v') + (bu', v) = (f, v) + Ev(L), \quad \forall v \in V$$

Ważne spostrzeżenia:

- Współczynnik wynikający z całkowania przez części, a dotyczący całki po brzegu ($[u'v]_0^L$) może zostać użyty do implementacji warunku Neumanna
- Nie uwzględnienie tego współczynnika jest równoznaczne z wymuszaniem warunku $u' = 0$ (!)
- Tego rodzaju warunek brzegowy nazywany jest *naturalnym warunkiem brzegowym* (warunek brzegowy spełniany jest w sposób naturalny)

Uwzględnienie funkcji pochodnej w równaniu i warunku brzegowym, notacja uogólniona

Uogólniony zapis problemu:

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

gdzie dla

$$(u', v') + (bu', v) = (f, v) + Ev(L), \quad \forall v \in V$$

mamy

$$\begin{aligned} a(u, v) &= (u', v') + (bu', v) \\ L(v) &= (f, v) + Ev(L) \end{aligned}$$

Uwzględnienie funkcji pochodnej w równaniu i warunku brzegowym, URL

Wstawiając $u = C + \sum_j c_j \psi_j$ oraz $v = \psi_i$ do

$$(u', v') + (bu', v) = (f, v) + Ev(L), \quad \forall v \in V$$

można otrzymać

$$\sum_{j \in \mathcal{I}_s} \underbrace{((\psi'_j, \psi'_i) + (b\psi'_j, \psi_i))}_{A_{i,j}} c_j = \underbrace{(f, \psi_i) + E\psi_i(L)}_{b_i}, \quad i \in \mathcal{I}_s$$

Spostrzeżenie: $A_{i,j}$ tym razem nie jest symetryczna, ze względu na istnienie wyrazu

$$(b\psi'_j, \psi_i) = \int_{\Omega} b\psi'_j \psi_i dx \neq \int_{\Omega} b\psi'_i \psi_j dx = (\psi'_i, b\psi_j)$$

Nazewnictwo: warunki brzegowe naturalne i podstawowe

$$(u', v') + (bu', v) = (f, v) + u'(L)v(L) - u'(0)v(0)$$

- Przypomnienie: zapomnienie o uwzględnieniu warunku brzegowego równoważne $u'(L) = u'(0) = 0$ (chyba, że wymuszono war. Dirichleta)
- Wymóg wartości pochodnej funkcji u' jest nazywany *warunkiem naturalnym* (ang. natural condition) i jest uwzględniany w równaniu poprzez zwykłe "wstawienie" wartości do równania w postaci wariacyjnej
- Wymóg wartości funkcji u na brzegu wymaga modyfikacji V ($\psi_i(0) = 0$ lub/i odpowiednio $\psi_i(L) = 0$) i jest nazywany warunkiem podstawowym (ang. essential boundary condition)

Uwaga:

Łatwo zapomnieć o uwzględnieniu warunku brzegowego całkując przez części. W ten sposób pomyłkowo przypisujemy warunek $u' = 0$ na danej części brzegu!

Problem:

$$-(\alpha(u)u')' = f(u), \quad x \in [0, L], \quad u(0) = 0, \quad u'(L) = E$$

- V to baza $\{\psi_i\}_{i \in \mathcal{I}_s}$ z $\psi_i(0) = 0$ ze względu na $u(0) = 0$
- Jak bardzo nieliniowe współczynniki $\alpha(u)$ oraz $f(u)$ wpływają na sformułowanie wariacyjne? (Nie bardzo!)

Uwzględnienie nieliniowego współczynnika, sformułowanie wariacyjne

m. Gal.: przemnoż przez v , scałkuj, scałkuj przez części

$$\int_0^L \alpha(u) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^L f(u)v dx + [\alpha(u)vu']_0^L \quad \forall v \in V$$

- $\alpha(u(0))v(0)u'(0) = 0$ ponieważ $v(0) = 0$
- $\alpha(u(L))v(L)u'(L) = \alpha(u(L))v(L)E$ ponieważ $u'(L) = E$

$$\int_0^L \alpha(u) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^L f(u)v dx + \alpha(u(L))v(L)E \quad \forall v \in V$$

lub

$$(\alpha(u)u', v') = (f(u), v) + \alpha(u(L))v(L)E \quad \forall v \in V$$

Uwzględnienie nieliniowego współczynnika, kłopoty spowodowane przez nieliniowość

- Brak możliwości użycia $a(u, v)$ oraz $L(v)$ w abstrakcyjnym zapisie równania, ponieważ a oraz L stają się nieliniowe
- Abstrakcyjny opis w najbardziej ogólnej postaci:
$$F(u; v) = 0 \quad \forall v \in V$$
- Co z URL? -> Otrzymujemy *nieliniowy* układ równań algebraicznych
- Aby go rozwiązać musimy skorzystać z iteracji Picarda lub metody Newtona rozwiązywania układów równań nieliniowych
- Mimo wszystko: sformułowanie wariacyjne niezbyt the variational formulation was not much affected by nonlinearities

- 1 Podstawy rozwiązywania równań różniczkowych
- 2 Zastosowanie metod
- 3 Użyteczne przykłady
- 4 Przykłady sformułowań wariacyjnych
- 5 Przykłady obliczeń ręcznych**
- 6 Obliczenia przy pomocy elementów skończonych
- 7 Sformułowanie wariacyjne dla problemów 2D i 3D

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in \Omega = [0, 1], \quad u'(0) = C, \quad u(1) = D$$

- Niech dana będzie baza wielomianów w postaci potęgowej $\psi_i \sim x^i$ na $[0, 1]$
- Ponieważ $u(1) = D$: $\psi_i(1) = 0$
- Modyfikacja bazy: $\psi_i(x) = (1-x)^{i+1}$, $i \in \mathcal{I}_s$
- Funkcja uwzględniająca war. brzeg.: $B(x) = Dx$
- $u(x) = B(x) + \sum_{j \in \mathcal{I}_s} c_j \psi_j = Dx + \sum_{j \in \mathcal{I}_s} c_j (1-x)^{j+1}$

Sformułowanie wariacyjne: znaleźć $(u - B) \in V$ takie, aby

$$(u', \psi'_i) = (f, \psi_i) - C\psi_i(0), \quad i \in \mathcal{I}_s$$

Uwzględniając $u(x) = B(x) + \sum_{j \in \mathcal{I}_s} c_j \psi_j$ otrzymuje się

$$\sum_{j \in \mathcal{I}_s} A_{i,j} c_j = b_i, \quad i \in \mathcal{I}_s$$

gdzie

$$A_{i,j} = (\psi'_j, \psi'_i)$$
$$b_i = (f, \psi_i) - (D, \psi'_i) - C\psi_i(0)$$

$$A_{i,j} = (\psi'_j, \psi'_i) = \int_0^1 \psi'_i(x) \psi'_j(x) dx = \int_0^1 (i+1)(j+1)(1-x)^{i+j} dx$$

Wybierzmy $f(x) = 2$:

$$\begin{aligned} b_i &= (2, \psi_i) - (D, \psi'_i) - C\psi_i(0) \\ &= \int_0^1 (2(1-x)^{i+1} - D(i+1)(1-x)^i) dx - C\psi_i(0) \end{aligned}$$

Łatwość obliczeń z wykorzystaniem sympy. $N = 1$ oraz $\mathcal{I}_s = \{0, 1\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C + D + 1 \\ 2/3 - C + D \end{pmatrix}$$

$$c_0 = -C + D + 2, \quad c_1 = -1,$$

$$u(x) = 1 - x^2 + D + C(x - 1) \quad (\text{ściśle rozwiązanie})$$

Kiedy rozwiązanie numeryczne jest dokładne?

Niech, poza warunkami brzegowymi Dirichleta, u_e leży w przestrzeni V , w której poszukiwane jest u ($u_e - B \in V$). Wtedy:

$$u = B + F, \quad F \in V$$

$$a(B + F, v) = L(v), \quad \forall v \in V$$

$$u_e = B + E, \quad E \in V$$

$$a(B + E, v) = L(v), \quad \forall v \in V$$

Odejmując od siebie równania otrzymuje się: $a(F - E, v) = 0$

z czego wynika, że:

$$E = F \text{ oraz } u = u_e$$

- 1 Podstawy rozwiązywania równań różniczkowych
- 2 Zastosowanie metod
- 3 Użyteczne przykłady
- 4 Przykłady sformułowań wariacyjnych
- 5 Przykłady obliczeń ręcznych
- 6 Obliczenia przy pomocy elementów skończonych**
- 7 Sformułowanie wariacyjne dla problemów 2D i 3D

Problem :

- Rozwiązać problem dany równaniem $-u''(x) = 2$,
 $u(0) = u(L) = 0$
- Wykorzystać siatkę jednorodnych elementów skończonych typu P1
- Przedstawić szczegóły wszystkich etapów obliczeń

Problem w postaci klasycznej:

$$-u''(x) = 2, \quad x \in (0, L), \quad u(0) = u(L) = 0,$$

Sformułowanie wariacyjne:

$$(u', v') = (2, v) \quad \forall v \in V$$

Sposób postępowania z warunkami brzegowymi

Ponieważ $u(0) = 0$ oraz $u(L) = 0$ należy wymusić

$$v(0) = v(L) = 0, \quad \psi_i(0) = \psi_i(L) = 0$$

Wybieramy jako funkcje bazowe funkcje trójkątne: $\psi_i = \varphi_i$,
 $i = 0, \dots, N_n - 1$.

Problem: funkcje skrajne nie spełniają warunków brzegowych
 $\varphi_0(0) \neq 0$ oraz $\varphi_{N_n-1}(L) \neq 0$

Rozwiązanie: wykluczamy z bazy φ_0 oraz φ_{N_n-1} i pracujemy na tak okrojonej bazie:

$$\psi_i = \varphi_{i+1}, \quad i = 0, \dots, N = N_n - 3$$

Wprowadzając stosowną indeksację $\nu(i)$: $\psi_i = \varphi_{\nu(i)}$ otrzymuje się:

$$u = \sum_{i \in \mathcal{I}_c} c_i \varphi_{\nu(i)}, \quad i = 0, \dots, N, \quad \nu(j) = j + 1$$

Obliczenia we współrzędnych globalnych; wzory

$$A_{i,j} = \int_0^L \varphi'_{i+1}(x)\varphi'_{j+1}(x)dx, \quad b_i = \int_0^L 2\varphi_{i+1}(x)dx$$

Wygodnie jest przeprowadzić reindeksację:

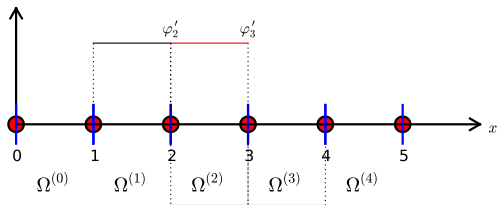
$$i + 1 \rightarrow i,$$

$$j + 1 \rightarrow j$$

aby otrzymać wzory: $\varphi'_i\varphi'_j$, zamiast $\varphi'_{i+1}\varphi'_{j+1}$

$$A_{i-1,j-1} = \int_0^L \varphi'_i(x)\varphi'_j(x) dx, \quad b_{i-1} = \int_0^L 2\varphi_i(x) dx$$

Obliczenia we współrzędnych globalnych; szczegóły



$$\varphi'_i \sim \pm h^{-1}$$

$$A_{i-1,i-1} = h^{-2}2h = 2h^{-1}, \quad A_{i-1,i-2} = h^{-1}(-h^{-1})h = -h^{-1}$$

oraz $A_{i-1,i} = A_{i-1,i-2}$

$$b_{i-1} = 2\left(\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h\right) = 2h$$

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 2h \end{pmatrix}$$

Równanie różnicowe odpowiadające pojedynczemu równaniu FEM

Równanie dla i . węzła:

$$-\frac{1}{h}c_{i-1} + \frac{2}{h}c_i - \frac{1}{h}c_{i+1} = 2h$$

Ponieważ, $c_i = u(x_{i+1}) \equiv u_{i+1}$, równanie dla $i - 1$. węzła ma postać:

$$-\frac{1}{h}c_{i-2} + \frac{2}{h}c_{i-1} - \frac{1}{h}c_i = 2h$$

i jest równoważne

$$-\frac{1}{h}u_{i-1} + \frac{2}{h}u_i - \frac{1}{h}u_{i+1} = 2h$$

Równanie FDM dla problemu $-u'' = 2$ ma postać

$$-\frac{1}{h^2}u_{i-1} + \frac{2}{h^2}u_i - \frac{1}{h^2}u_{i+1} = 2$$

Po pomnożeniu przez h okazuje się, że:

FEM i FDM dają równoważne URL *w tym zagadnieniu.*

(Równania dla węzłów brzegowych również są w tym przypadku identyczne)

Obliczenia we współrzędnych lokalnych; wzory

- Powtórz obliczenia z poprzedniego przykładu, tym razem wykonując obliczenia z perspektywy komórek.
- Obliczenia wykonuj komórka po komórce
- Każde obliczenia wykonuj wykonując transformację współrzędnych globalnych do współrzędnych unormowanych $X \in [-1, 1]$

$$A_{i-1,j-1}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{d}{dX} \tilde{\varphi}_r(X) \frac{d}{dX} \tilde{\varphi}_s(X) \frac{h}{2} dX,$$

$$\tilde{\varphi}_0(X) = \frac{1}{2}(1 - X), \quad \tilde{\varphi}_1(X) = \frac{1}{2}(1 + X)$$

$$\frac{d\tilde{\varphi}_0}{dX} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{d\tilde{\varphi}_1}{dX} = \frac{1}{2}$$

Z reguły łańcuchowej:

$$\frac{d\tilde{\varphi}_r}{dx} = \frac{d\tilde{\varphi}_r}{dX} \frac{dX}{dx} = \frac{2}{h} \frac{d\tilde{\varphi}_r}{dX}$$

Obliczenia we współrzędnych lokalnych; szczegóły

$$A_{i-1,j-1}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{h} \frac{d\tilde{\varphi}_r}{dX} \frac{2}{h} \frac{d\tilde{\varphi}_s}{dX} \frac{h}{2} dX = \tilde{A}_{r,s}^{(e)}$$

$$b_{i-1}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} 2\varphi_i(x) dx = \int_{-1}^1 2\tilde{\varphi}_r(X) \frac{h}{2} dX = \tilde{b}_r^{(e)}, \quad i = q(e, r), \quad r = 0, 1$$

Obliczenia należy wykonać dla indeksów r, s przyjmujących wszystkie możliwe kombinacje wartości 0, 1, obliczając za każdym razem jeden z elementów lokalnej macierzy oraz wektora:

$$\tilde{A}^{(e)} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}^{(e)} = h \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Przykład:

$$\tilde{A}_{0,1}^{(e)} = \int_{-1}^1 \frac{2}{h} \frac{d\tilde{\varphi}_0}{dX} \frac{2}{h} \frac{d\tilde{\varphi}_1}{dX} \frac{h}{2} dX = \frac{2}{h} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{2}{h} \frac{1}{2} \frac{h}{2} \int_{-1}^1 dX = -\frac{1}{h}$$

Obliczenia we współrzędnych lokalnych; szczegóły

- Elementy skrajne zawierają jedynie jedną niewiadomą
- $\Omega^{(0)}$: wartość w lewym węźle znana, przyczynek tylko od prawego węzła
- $\Omega^{(N_e)}$: wartość w prawym węźle znana, przyczynek tylko od lewego węzła

Dla $e = 0$ oraz $e = N_e$:

$$\tilde{A}^{(e)} = \frac{1}{h} (1), \quad \tilde{b}^{(e)} = h (1)$$

Jeden stopień swobody ("węzeł") w skrajnych elementach ($r = 0$ odpowiada jednemu stopniowi swobody)

Obliczenia we współrzędnych lokalnych; assembling

4 elementy typu P1:

```
vertices = [0, 0.5, 1, 1.5, 2]
cells = [[0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4]]
dof_map = [[0], [0, 1], [1, 2], [2]]           # only 1 dof in elm 0, 3
```

Kod Pythona wykonujący assembling macierzy globalnej:

```
# Ae[e][r,s]: element matrix, be[e][r]: element vector
# A[i,j]: coefficient matrix, b[i]: right-hand side

for e in range(len(Ae)):
    for r in range(Ae[e].shape[0]):
        for s in range(Ae[e].shape[1]):
            A[dof_map[e,r],dof_map[e,s]] += Ae[e][i,j]
            b[dof_map[e,r]] += be[e][i,j]
```

W wyniku powstaje ten sam URL co w przypadku obliczeń we współrzędnych globalnych.

Uniwersalna metoda konstrukcji funkcji spełniających warunki brzegowe - warunek Dirichleta

- Stworzenie funkcji $B(x)$ czasem bywa niełatwe w szczególności dla problemów 2D oraz 3D
- Przy pomocy funkcji bazowych φ_i , można jednak podać uniwersalny i ogólny sposób jej konstrukcji (!)

Niech

- I_b : zbiór indeksów z węzłami gdzie u jest znane
- U_i : wartości funkcji wynikająca z warunku Dirichleta w węźle i , $i \in I_b$

Ogólna postać funkcji B :

$$B(x) = \sum_{j \in I_b} U_j \varphi_j(x)$$

Niech dany będzie warunek Dirichleta $u(x_k) = U_k, k \in I_b$:

$$u(x_k) = \sum_{j \in I_b} U_j \underbrace{\varphi_j(x)}_{\neq 0 \text{ tylko dla } j=k} + \sum_{j \in I_s} c_j \underbrace{\varphi_{\nu(j)}(x_k)}_{=0, k \notin I_s} = U_k$$

Przykład: zagadnienie brzegowe z dwoma niejednorodnymi warunkami Dirichleta; sformułowanie wariacyjne

$$-u'' = 2, \quad u(0) = C, \quad u(L) = D$$

$$\int_0^L u'v' \, dx = \int_0^L 2v \, dx \quad \forall v \in V$$

$$(u', v') = (2, v) \quad \forall v \in V$$

Przykład: zagadnienie brzegowe z dwoma niejednorodnymi warunkami Dirichleta; funkcja B

$$B(x) = \sum_{j \in I_b} U_j \varphi_j(x)$$

W tym wypadku $I_b = \{0, N_n - 1\}$, $U_0 = C$, $U_{N_n-1} = D$; ψ_i są funkcjami związanymi z węzłami wewnątrz obszaru φ_j :

$$\psi_i = \varphi_{\nu(i)}, \quad \nu(i) = i + 1, \quad i \in \mathcal{I}_s = \{0, \dots, N = N_n - 3\}$$

$$\begin{aligned} u(x) &= \underbrace{C \cdot \varphi_0 + D \varphi_{N_n-1}}_{B(x)} + \sum_{j \in \mathcal{I}_s} c_j \varphi_{j+1} \\ &= C \cdot \varphi_0 + D \varphi_{N_n-1} + c_0 \varphi_1 + c_1 \varphi_2 + \dots + c_N \varphi_{N_n-2} \end{aligned}$$

Przykład: zagadnienie brzegowe z dwoma niejednorodnymi warunkami Dirichleta; szczegóły

Wstawmy $u = B + \sum_j c_j \psi_j$ do sformułowania wariacyjnego:

$$(u', v') = (2, v) \quad \Rightarrow \quad \left(\sum_j c_j \psi'_j, \psi'_i \right) = (2 - B', \psi'_i) \quad \forall v \in V$$

$$A_{i-1, j-1} = \int_0^L \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx$$

$$b_{i-1} = \int_0^L (f(x) \varphi_i(x) - B'(x) \varphi'_i(x)) dx, \quad B'(x) = C \varphi'_0(x) + D \varphi'_{N_n-1}$$

for $i, j = 1, \dots, N + 1 = N_n - 1$.

Przyczynki pochodzące od warunków brzegowych - od całki $-\int B' \varphi'_i dx$: C/h należy dodać do b_0 , D/h należy dodać do b_N .

Przykład: zagadnienie brzegowe z dwoma niejednorodnymi warunkami Dirichleta; obliczenia we wsp. lokalnych

- Obliczenia macierzy lokalnych - jak w poprzednim przykładzie
- Nowa postać lokalnych wektorów prawej strony - dla pierwszego i ostatniego elementu

Dla pierwszego elementu:

$$\begin{aligned}\tilde{b}_0^{(1)} &= \int_{-1}^1 \left(f\tilde{\varphi}_1 - C \frac{2}{h} \frac{d\tilde{\varphi}_0}{dX} \frac{2}{h} \frac{d\tilde{\varphi}_1}{dX} \right) \frac{h}{2} dX = \\ &= \frac{h}{2} \int_{-1}^1 \tilde{\varphi}_1 dX - C \frac{2}{h} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{2}{h} \frac{1}{2} \frac{h}{2} \cdot 2 = h + C \frac{1}{h}.\end{aligned}$$

Dla ostatniego elementu:

$$\begin{aligned}\tilde{b}_0^{N_e} &= \int_{-1}^1 \left(f\tilde{\varphi}_0 - D \frac{2}{h} \frac{d\tilde{\varphi}_1}{dX} \frac{2}{h} \frac{d\tilde{\varphi}_0}{dX} \right) \frac{h}{2} dX = \\ &= \frac{h}{2} \int_{-1}^1 \tilde{\varphi}_0 dX - D \frac{2}{h} \frac{1}{2} \frac{2}{h} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{h}{2} \cdot 2 = h + D \frac{1}{h}.\end{aligned}$$

Sposoby modyfikacji URL

- Metoda 1: uwzględnij wartości war. Dir. poprzez funkcję $B(x)$ i zażądaj $\psi_i = 0$ na brzegu Dirichleta
- Metoda 2: zrezygnuj z $B(x)$, zrezygnuj z warunków na ψ_i , wygeneruj URL tak jakby warunku Dirichleta nie było i dopiero wykonaj stosowne modyfikacje bezpośrednio na URL

Metoda 2: zawsze wybieraj $\psi_i = \varphi_i$ dla wszystkich $i \in \mathcal{I}_s$:

$$u(x) = \sum_{j \in \mathcal{I}_s} c_j \varphi_j(x), \quad \mathcal{I}_s = \{0, \dots, N = N_n - 1\}$$

Interesujący sposób uwzględniania warunku Dirichleta

Wszystkie Wartości u (również te na brzegu Dirichleta) można traktować jako niewiadome (wymagające obliczenia).

Modyfikacja URL; układ w postaci oryginalnej

$$-u'' = 2, \quad u(0) = 0, \quad u(L) = D$$

Macierz w postaci identycznej jakby warunku Dirichleta nie było:

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ 2h \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 2h \\ h \end{pmatrix}$$

Modyfikacja URL (wierszy) (obl. we wsp. glob.)

- Warunek Dirichleta $u(x_k) = U_k$ jest równoważny $c_k = U_k$ (ponieważ $c_k = u(x_k)$)
- zastąpmy pierwszy wiersz równaniem $c_0 = 0$
- zastąpmy ostatni wiersz równaniem $c_N = D$

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} h & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2h \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 2h \\ D \end{pmatrix}$$

Modyfikacja URL; (obl. we wsp. lokalnych)

Na elemencie 0 znane jest u w węźle lokalnym o indeksie $r = 0$

->

Wymieńmy pierwsze równanie dla tego elementu na $\tilde{c}_0 = 0$:

$$\tilde{A}^{(0)} = A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} h & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$$

Na elemencie N_e znane jest u w węźle lokalnym o indeksie $r = 1$

->

Wymieńmy ostatnie równanie dla tego elementu na $\tilde{c}_1 = D$:

$$\tilde{A}^{(N_e)} = A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & h \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}^{(N_e)} = \begin{pmatrix} h \\ D \end{pmatrix}$$

- Przedstawiona modyfikacja niszczy symetrię macierzy: np. $A_{0,1} \neq A_{1,0}$
- Symetria - pożądana własność URL (szczególnie dla zagadnień 2D i 3D) (szybsze obliczenia, mniejsze obciążenie pamięci)
- Można zmodyfikować URL tak, aby zachować symetrię!

Algorytm:

- 1 Odejmij od prawej strony kolumnę i pomnożoną przez U_i
- 2 wyzeruj kolumnę i i wiersz i
- 3 Przypisz wartość 1 do elementu $A_{i,i}$
- 4 Przypisz $b_i = U_i$

Modyfikacja URL z zachowaniem symetrii układu (wsp. lokalne)

Modyfikacja z zachowaniem symetrii zastosowana dla macierzy lokalnej $\tilde{A}^{(N_e)}$:

$$\tilde{A}^{(N_e)} = A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}^{(N_e)} = \begin{pmatrix} h + D/h \\ D \end{pmatrix}$$

Warunek brzegowy Neumanna

Jak uwzględnić $u'(0) = C$ w FEM?

$$-u'' = f, \quad u'(0) = C, \quad u(L) = D$$

- $\psi_i(L) = 0$ ze względu na warunek Dirichleta $u(L) = D$ (lub modyfikacja samego URL bez wymagań narzuconych na ψ)
- Brak wymagań co do $\psi_i(0)$
- Warunek $u'(0) = C$ można uwzględnić jak do tej pory, poprzez człon "całkowo-brzegowy" pochodzący z całkowania przez części

Metoda Galerkina:

$$\int_0^L (u''(x) + f(x))\psi_i(x) dx = 0, \quad i \in \mathcal{I}_s$$

Całkowanie $u''\psi_i$ przez części:

$$\int_0^L u'(x)\psi_i'(x) dx - (u'(L)\psi_i(L) - u'(0)\psi_i(0)) - \int_0^L f(x)\psi_i(x) dx = 0$$

- $u'(L)\psi_i(L) = 0$ ponieważ $\psi_i(L) = 0$
- $u'(0)\psi_i(0) = C\psi_i(0)$ ponieważ $u'(0) = C$

Metoda 1: Zastosowanie funkcji brzegowej $B(x)$ i usunięcie węzłów Dirichleta z URL

- $\psi_i = \varphi_i, i \in \mathcal{I}_s = \{0, \dots, N = N_n - 2\}$
- $B(x) = D\varphi_{N_n-1}(x), u = B + \sum_{j=0}^N c_j \varphi_j$

$$\int_0^L u'(x) \varphi_i'(x) dx = \int_0^L f(x) \varphi_i(x) dx - C \varphi_i(0), \quad i \in \mathcal{I}_s$$

$$\sum_{j=0}^N \left(\int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dx \right) c_j = \int_0^L (f \varphi_i - D \varphi_N' \varphi_i) dx - C \varphi_i(0)$$

for $i = 0, \dots, N = N_n - 2$.

Metoda 2: Wykorzystanie wszystkich φ_i i uwzględnienie warunku Dirichleta bezpośrednio w URL

- $\psi_i = \varphi_i$, $i = 0, \dots, N = N_n - 1$ (dla wszystkich węzłów)
- $\varphi_N(L) \neq 0$, więc $u'(L)\varphi_N(L) \neq 0$
- Jednakże człon $u'(L)\varphi_N(L)$ w b_N będzie usunięty w momencie uwzględniania warunku Dirichleta $b_N = D$

Można zatem pominąć człon $u'(L)\varphi_i(L)$!

Składowe $u'\varphi_i$ w węzłach x_i , w których wymuszamy warunek Dirichleta, mogą zostać pominięte.

$$u(x) = \sum_{j=0}^{N=N_n-1} c_j \varphi_j(x)$$

$$\sum_{j=0}^{N=N_n-1} \left(\int_0^L \varphi_j'(x) \varphi_j'(x) dx \right) c_j = \int_0^L f(x) \varphi_i(x) dx - C \varphi_i(0)$$

Trzeba obliczyć wszystkie elementy dla $i = 0, \dots, N = N_n - 1$, a następnie zmodyfikować ostatnie równanie do $c_N = D$.

Wpływ warunku Neumanna na elementy macierzy A i wektora b

Dodatkowy człon $C\varphi_0(0)$ ma wpływ jedynie na wektor prawej strony pierwszego elementu ($\varphi_0 = 0$ na wszystkich pozostałych elementach).

$$\tilde{A}^{(0)} = A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}^{(0)} = \begin{pmatrix} h - C \\ h \end{pmatrix}$$

Równanie różniczkowe definiuje całki sformułowania wariacyjnego.

Funkcje, które użytkownik musi podać na wejście programu:

```
integrand_lhs(phi, r, s, x)
boundary_lhs(phi, r, s, x)
integrand_rhs(phi, r, x)
boundary_rhs(phi, r, x)
```

(Ponadto potrzebna jest również informacja dotycząca siatki zagadnienia, opisana przy pomocy struktur: `vertices`, `cells`, oraz `dof_map`).

Pseudokod a'la Python; obliczenia dla elementu

```
<Declare global matrix, global rhs: A, b>

# Loop over all cells
for e in range(len(cells)):

    # Compute element matrix and vector
    n = len(dof_map[e]) # no of dofs in this element
    h = vertices[cells[e][1]] - vertices[cells[e][0]]
    <Declare element matrix, element vector: A_e, b_e>

    # Integrate over the reference cell
    points, weights = <numerical integration rule>
    for X, w in zip(points, weights):
        phi = <basis functions + derivatives at X>
        detJ = h/2
        x = <affine mapping from X>
        for r in range(n):
            for s in range(n):
                A_e[r,s] += integrand_lhs(phi, r, s, x)*detJ*w
                b_e[r] += integrand_rhs(phi, r, x)*detJ*w

    # Add boundary terms
    for r in range(n):
        for s in range(n):
            A_e[r,s] += boundary_lhs(phi, r, s, x)*detJ*w
            b_e[r] += boundary_rhs(phi, r, x)*detJ*w
```

Pseudokod a'la Python; warunki brzegowe i assembling macierzy globalnych

```
for e in range(len(cells)):
    ...

    # Incorporate essential boundary conditions
    for r in range(n):
        global_dof = dof_map[e][r]
        if global_dof in essbc_dofs:
            # dof r is subject to an essential condition
            value = essbc_docs[global_dof]
            # Symmetric modification
            b_e -= value*A_e[:,r]
            A_e[r,:] = 0
            A_e[:,r] = 0
            A_e[r,r] = 1
            b_e[r] = value

    # Assemble
    for r in range(n):
        for s in range(n):
            A[dof_map[e][r], dof_map[e][r]] += A_e[r,s]
            b[dof_map[e][r]] += b_e[r]

<solve linear system>
```

- 1 Podstawy rozwiązywania równań różniczkowych
- 2 Zastosowanie metod
- 3 Użyteczne przykłady
- 4 Przykłady sformułowań wariacyjnych
- 5 Przykłady obliczeń ręcznych
- 6 Obliczenia przy pomocy elementów skończonych
- 7 Sformułowanie wariacyjne dla problemów 2D i 3D**

Główne różnice przy przechodzeniu z 1D do 2D/3D

- Całkowanie przez części - uogólnienie wzoru
- Inna geometria elementów (cell)

Całkowanie przez części dla zagadnień wielowymiarowych (wzory Greena)

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (\alpha(\mathbf{x}) \nabla u) v \, dx = \int_{\Omega} \alpha(\mathbf{x}) \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} a \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds$$

- $\int_{\Omega} () \, dx$: całka obszarowa (2D) lub objętościowa (3D)
- $\int_{\partial\Omega} () \, ds$: całka krzywoliniowa (2D) lub obszarowa (3D)
- $\partial\Omega_N$: warunki Neumanna $-a \frac{\partial u}{\partial n} = g$
- $\partial\Omega_D$: warunki Dirichleta $u = u_0$
- $v \in V$ musi znikać na $\partial\Omega_D$ (jeśli implementujemy metodę 1)

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla u + \beta u &= \nabla \cdot (\alpha \nabla u) + f, & \mathbf{x} \in \Omega \\ u &= u_0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_D \\ -\alpha \frac{\partial u}{\partial n} &= g, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_N \end{aligned}$$

- Wiadome: α , β , f , u_0 , oraz g .
- Równanie różniczkowe drugiego rzędu: rozwiązywalne dla *dokładnie jednego warunku brzegowego nakładanego w każdym węźle brzegowym*.

Metoda 1 (funkcja brzegowa i $\psi_i = 0$ na $\partial\Omega_D$) gwarantuje spełnienie warunku $u = u_0$:

$$u(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}) + \sum_{j \in \mathcal{I}_s} c_j \psi_j(\mathbf{x}), \quad B(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x})$$

Całkowanie przez części w 1D/2D/3D

Metoda Galerkina: pomnóż przez $v \in V$ i scałkuj nad Ω ,

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla u + \beta u) v \, dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\alpha \nabla u) v \, dx + \int_{\Omega} f v \, dx$$

Całkowanie przez części pierwszej całki po prawej stronie zgodnie ze wzorem:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\alpha \nabla u) v \, dx = - \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds,$$

daje ostatecznie

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla u + \beta u) v \, dx = - \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds + \int_{\Omega} f v \, dx$$

Uwzględnianie warunku Neumanna w sformułowaniu wariacyjnym

Uwaga: $v \neq 0$ jedynie na $\partial\Omega_N$ (ponieważ $v = 0$ na $\partial\Omega_D$):

$$\int_{\partial\Omega} \alpha \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds = \int_{\partial\Omega_N} \underbrace{\alpha \frac{\partial u}{\partial n}}_{-g} v \, ds = - \int_{\partial\Omega_N} g v \, ds$$

Ostateczna postać sformułowania wariacyjnego:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla u + \beta u) v \, dx = - \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega_N} g v \, ds + \int_{\Omega} f v \, dx$$

Równoważnie w notacji abstrakcyjnej:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla u, v) + (\beta u, v) = -(\alpha \nabla u, \nabla v) - (g, v)_N + (f, v)$$

$(g, v)_N$: całka krzywoliniowa (2D) lub powierzchniowa (3D) nad $\partial\Omega_N$.

Etapy wyprowadzenia URL

- $\forall v \in V$ jest zastępowana przez $\psi_i, i \in \mathcal{I}_s$
- w sformułowaniu wariacyjnym uwzględnij $u = B + \sum_{j \in \mathcal{I}_s} c_j \psi_j$,
 $B = u_0$,
- Określ odwzorowanie indeksów globalnych i, j oraz i (dla wektora prawej strony)
- Oblicz elementy URL $\sum_{i \in \mathcal{I}_s} A_{i,j} c_j = b_i, i \in \mathcal{I}_s$ wg wzorów

$$A_{i,j} = (\mathbf{v} \cdot \nabla \psi_j, \psi_i) + (\beta \psi_j, \psi_i) + (\alpha \nabla \psi_j, \nabla \psi_i)$$

$$b_i = (\mathbf{g}, \psi_i)_N + (\mathbf{f}, \psi_i) - (\mathbf{v} \cdot \nabla u_0, \psi_i) + (\beta u_0, \psi_i) + (\alpha \nabla u_0, \nabla \psi_i)$$

Transformacja elementu unormowanego w 2D/3D (1)

Chcemy obliczyć całkę nad elementem całkując we współrzędnych unormowanych.

$$\int_{\Omega(e)} \alpha(\mathbf{x}) \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, d\mathbf{x}$$

Odwzorowanie geometrii ze współrzędnych lokalnych (unormowanych) do współrzędnych globalnych:

$$\mathbf{x}(\mathbf{X})$$

gdzie Jakobian przekształcenia J ,

$$J_{i,j} = \frac{\partial x_j}{\partial X_i}$$

Transformacja elementu unormowanego w 2D/3D (2)

- pod całką zastępujemy $dx \rightarrow \det J dX$.
- Trzeba wyrazić $\nabla\varphi_i$ przy pomocy indeksacji lokalnej $\tilde{\varphi}_r$,
 $i = q(e, r)$: $\nabla\tilde{\varphi}_r(\mathbf{X})$
- Potrzeba obliczyć $\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\varphi}_r(\mathbf{X})$ (pochodna względem \mathbf{x})
- Mamy tymczasem $\nabla_{\mathbf{X}}\tilde{\varphi}_r(\mathbf{X})$ (pochodną względem \mathbf{X})
- Potrzeba transformować $\nabla_{\mathbf{X}}\tilde{\varphi}_r(\mathbf{X})$ do $\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\varphi}_r(\mathbf{X})$

Znajdujemy:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{X}}\tilde{\varphi}_r &= J \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\varphi_i \\ \nabla_{\mathbf{x}}\varphi_i &= \nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\varphi}_r(\mathbf{X}) = J^{-1} \cdot \nabla_{\mathbf{X}}\tilde{\varphi}_r(\mathbf{X})\end{aligned}$$

Transformacja całki ze współrzędnych globalnych do lokalnych:

$$\int_{\Omega^{(e)}} \alpha(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}}\varphi_i \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\varphi_j \, d\mathbf{x} = \int_{\tilde{\Omega}^r} \alpha(\mathbf{x}(\mathbf{X})) (J^{-1} \cdot \nabla_{\mathbf{X}}\tilde{\varphi}_r) \cdot (J^{-1} \cdot \nabla_{\mathbf{X}}\tilde{\varphi}_s) \det J \, d\mathbf{X}$$

Całkowanie numeryczne

Całkowanie numeryczne na unormowanym elemencie (trójkącie lub czworoboku)

$$\int_{\bar{\Omega}^r} g \, dX = \sum_{j=0}^{n-1} w_j g(\bar{X}_j)$$

Moduł `numint.py` zawiera różne kwadratury całkujące:

```
>>> import numint
>>> x, w = numint.quadrature_for_triangles(num_points=3)
>>> x
[(0.16666666666666666, 0.16666666666666666),
 (0.66666666666666666, 0.16666666666666666),
 (0.16666666666666666, 0.66666666666666666)]
>>> w
[0.16666666666666666, 0.16666666666666666, 0.16666666666666666]
```

- Element trójkątny: kwadratury dla $n = 1, 3, 4, 7$ pozwalają na całkowanie w sposób dokładny wielomianów stopnia odpowiednio 1, 2, 3, 4.
- Element czworobokienny: całkowanie wielomianów stopnia